

MAT 111 - Cálculo Diferencial e Integral I
Gabarito da P1 - 23/04/2014
Professor: Gláucio Terra

QUESTÃO 1. Calcule:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}]$

(b) $\lim_{x \rightarrow 5} [(x^2 - 25) \cos\left(\frac{4x^3 - 2x + 5}{x^2 - 25}\right) + \frac{\sin(x^2 - 25)}{x - 5}]$

RESPOSTA:

(a) $\forall x > 0: \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{x + \sqrt{x} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1}.$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, segue $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 = 2$ (usamos as regras operacionais para limites e a continuidade da função raiz). Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 5} \left[(x^2 - 25) \cos\left(\frac{4x^3 - 2x + 5}{x^2 - 25}\right) + \frac{\sin(x^2 - 25)}{x - 5} \right].$

Observe que, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$, $-1 \leq \cos\left(\frac{4x^3 - 2x + 5}{x^2 - 25}\right) \leq 1$ e $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 25) = 0$. Como o produto de uma função limitada por uma que vai a zero também vai a zero, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 25) \cos\left(\frac{4x^3 - 2x + 5}{x^2 - 25}\right) = 0$$

Por outro lado, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$,

$$\frac{\sin(x^2 - 25)}{x - 5} = (x + 5) \frac{\sin(x^2 - 25)}{x^2 - 25}$$

O limite trigonométrico fundamental e o teorema sobre limites de funções compostas permitem concluir que $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sin(x^2 - 25)}{x^2 - 25}$ existe e vale 1. Como $\lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) = 10$, segue-se da regra do produto para limites que existe o limite $\lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) \frac{\sin(x^2 - 25)}{x^2 - 25}$ e vale 10. Finalmente, pela regra da soma para limites, conclui-se que o limite $\lim_{x \rightarrow 5} \left[(x^2 - 25) \cos\left(\frac{4x^3 - 2x + 5}{x^2 - 25}\right) + \frac{\sin(x^2 - 25)}{x - 5} \right]$ existe e vale 10.

QUESTÃO 2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Determine o conjunto dos pontos em que f é contínua.

(b) Determine o conjunto dos pontos em que f é derivável e calcule sua derivada nesses pontos.

RESPOSTA:

- (a) No zero, f é contínua, pois o limite de f no zero é igual a 0, i.e. a $f(0)$, pelo fato de ser f o produto de uma função limitada por outra que tem limite no zero igual a zero. Em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, f também é contínua, o que decorre do seguinte argumento:

1. A função $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ é contínua, por ser a composta das funções contínuas $\sin$ e $x \mapsto \frac{1}{x}$.
2. Pelo item anterior e pelo fato de ser contínuo o produto de funções contínuas, conclui-se que a restrição $\tilde{f} = f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ é contínua.
3. Para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe uma vizinhança V centrada em a contida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como as restrições de f e $\tilde{f}$ a V coincidem, pelo item anterior conclui-se que a restrição de f a V é contínua. Finalmente, pelo fato de a noção de continuidade ser local, conclui-se que f é contínua em a .

Portanto, f é contínua em $\mathbb{R}$.

- (b) A função $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ é derivável, por ser a composta das funções deriváveis $\sin$ e $x \mapsto \frac{1}{x}$. Então segue-se da regra de Leibnitz que a restrição $f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ é derivável; portanto, pelo fato de a noção de diferenciabilidade ser local, e por um argumento análogo ao do item anterior, conclui-se que f é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e sua derivada nos pontos desse conjunto coincide com a derivada da referida restrição, ou seja, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = \sin \frac{1}{x} + x \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2}$.

No zero, f não é derivável, pois o seu quociente de Newton no referido ponto, i.e. $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \sin \frac{1}{h}$, não tem limite no zero.

QUESTÃO 3. Ache a equação das retas que passam pelo ponto $(2, -3)$ e são tangentes à parábola $y = x^2 + x$.

RESPOSTA: Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + x$. Temos, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x + 1$. Assim, dado $a \in \mathbb{R}$, a reta r_a tangente ao gráfico de f (i.e. tangente à parábola de equação $y = x^2 + x$) no ponto $(a, f(a))$ é a reta de equação $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, i.e. $y - (a^2 + a) = (2a + 1)(x - a)$. O ponto $(2, -3)$ pertence à reta r_a se, e somente se $-3 - (a^2 + a) = (2a + 1)(2 - a) \Leftrightarrow a^2 - 4a - 5 = 0 \Leftrightarrow a = 5$ ou $a = -1$. Assim, as retas pedidas são as retas de equação $y - (a^2 + a) = (2a + 1)(x - a)$ com $a = 5$ ou $a = -1$.

QUESTÃO 4. Calcule as derivadas das funções abaixo:

- (a) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$.
(b) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$

RESPOSTA:

- (a) $\forall x > 0$, $f(x) = \exp(x \ln x)$; portanto, pela regra da cadeia e pela regra de Leibnitz, conclui-se que f é derivável e que sua derivada é dada por $f'(x) = \exp'(x \ln x) \cdot (\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x (\ln x + 1)$.
(b) Basta aplicar a regra da cadeia e a regra do quociente para se concluir que f é derivável e que sua função derivada é a função $\mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$x \mapsto \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2}.$$

QUESTÃO 5. Uma partícula está se movendo ao longo da curva $y = \sqrt{x}$. Quando a partícula passa pelo ponto $(4, 2)$, sua coordenada x cresce a uma taxa de 3 cm/s. Quão rápido está variando a distância da partícula à origem neste instante?

RESPOSTA: Suponha que a coordenada x da partícula seja dada por uma função derivável $x = x(t)$, onde t representa o tempo. Como a partícula se move ao longo da curva $y = \sqrt{x}$, para cada instante $t \in \text{dom } x$ a posição $P(t)$ da partícula será $(x(t), \sqrt{x(t)})$. Assim, a distância da partícula à origem, para cada $t \in \text{dom } x$, será dada por $d(t) = \sqrt{x(t)^2 + x(t)}$. Seja $t_0 \in \text{dom } x$ o instante em que a partícula passa pelo ponto $(4, 2)$. Pede-se para calcular $d'(t_0)$, dado que $x'(t_0) = 3$. Mas, para todo $t \in \text{dom } x$, tem-se, pela regra da cadeia:

$$d'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x(t)^2 + x(t)}}.$$

Portanto, para $t = t_0$, temos $d'(t_0) = \frac{2x(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)}{2\sqrt{x(t_0)^2 + x(t_0)}}$; substituindo $x(t_0) = 4$ e $x'(t_0) = 3$, obtemos $d'(t_0) = \frac{27}{2\sqrt{20}}$.

QUESTÃO 6. Estude a diferenciabilidade no zero da função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \exp \sqrt{x}$.

RESPOSTA:

Solução 1: Suponha que f seja derivável no zero. Como $\ln$ é derivável em $f(0) = 1$, segue-se da regra da cadeia que $\ln \circ f$ é derivável no zero. Chega-se, pois, a uma contradição, pois $\ln \circ f$ é a função raiz quadrada, a qual não é derivável no zero, conforme já demonstrado em aula.

Solução 2: O quociente de Newton de f no zero é a função $(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x} = F(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}},$$

onde

$$F : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \begin{cases} \frac{e^y - 1}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 1 & \text{se } y = 0 \end{cases}.$$

Como F e a função raiz quadrada são contínuas, segue-se que a composta $F \circ \sqrt{\cdot} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ também o é, portanto seu limite no zero existe e vale $F(\sqrt{0}) = 1$; e, como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, segue-se que $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(\sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, portanto não existe o limite no zero do quociente de Newton de f no zero.