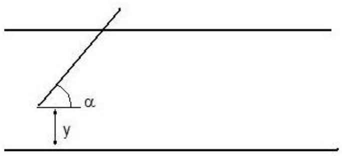
MAT 111 - Cálculo I - 2014

Resolução de Algumas Questões da $3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

1-) *Problema de Buffon.* Num plano são traçadas linhas paralelas equidistantes. Joga-se neste plano uma agulha cujo comprimento é igual à distância entre as linhas. Calcule a probabilidade de que a agulha intercepte uma das linhas.

RESP.:

Seja d a distância entre as linhas; por hipótese, d é igual ao comprimento da agulha. Descrevamos a posição final da agulha, após o lançamento, pela distância y da sua extremidade inferior até a linha que fica imediatamente abaixo e pelo ângulo α que a agulha forma com a horizontal, conforme a figura abaixo.



Tem-se: $0 \leqslant y < d$ e $0 \leqslant \alpha < \pi$. O espaço amostral será, portanto, $\Omega = [0, d) \times [0, \pi) \subset \mathbb{R}^2$. Designemos por $S \subset \Omega$ o conjunto dos eventos que correspondem a "sucesso", i.e. o conjunto das posições finais em que a agulha intercepta alguma linha. Admitindo que não haja razão para que alguma posição final ocorra com mais frequência que outra, o espaço deve ser equiprovável; assim, denotando por $A(X)$ a área de um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ (que tenha área no sentido da integral de Riemann), a probabilidade de sucesso será dada por $P = \frac{A(S)}{A(\Omega)} = \frac{A(S)}{\pi d}$.

Dado $(y, \alpha) \in \Omega$, tem-se $(y, \alpha) \in S$ se, e somente se, (i) $y > 0$ e $\arcsin \frac{d-y}{d} \leqslant \alpha \leqslant \pi - \arcsin \frac{d-y}{d}$ ou (ii) $y = 0$ e α qualquer. Desconsideraremos os eventos do tipo (ii), que correspondem a um subconjunto de Ω de área zero, i.e. de probabilidade zero. Assim, $A(S) = \int_0^d (\pi - 2 \arcsin \frac{d-y}{d})\, dy$. Integrando-se por partes, tomamos $\int \arcsin \frac{d-y}{d}\, dy = -(d-y) \arcsin \frac{d-y}{d} - \sqrt{d^2 - (d-y)^2}$, donde $\int (\pi - 2 \arcsin \frac{d-y}{d})\, dy = \pi y + 2[(d-y) \arcsin \frac{d-y}{d} + \sqrt{d^2 - (d-y)^2}]$. Portanto, aplicando-se o Teorema Fundamental do Cálculo, conclui-se que $A(S) = \pi d + 2(d - d \arcsin 1) = 2d$. Obtém-se, então, $P = \frac{2d}{\pi d} = \frac{2}{\pi}$.

2-) *Teorema da Energia Cinética.* Sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo Ox atua uma força $F(x) = f(x)\, \overrightarrow{i}$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. O trabalho τ realizado por F quando a partícula se desloca de $x = x_0$ até $x = x_1$ é definido por:

$$\tau = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx$$

admitindo-se que f seja integrável em $[x_0, x_1]$. Suponha que f seja contínua, que a partícula tenha massa $m > 0$ e que o seu movimento seja uma função derivável até segunda ordem $x = x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, governado pela lei de Newton:

$$m x''(t)\, \overrightarrow{i} = F\big(x(t)\big).$$

Mostre que o trabalho τ realizado pela força F atuante sobre a partícula quando a mesma se desloca de $x_0 = x(t_0)$ até $x_1 = x(t_1)$ é igual à variação de energia cinética $\frac{1}{2}\, m\, x'(t_1)^2 - \frac{1}{2}\, m\, x'(t_0)^2$.

Resp.: Pelo teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann, tem-se:

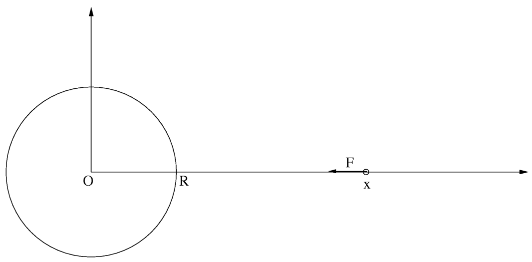
$$\tau = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f\big(x(t)\big)x'(t)\,dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} mx''(t)\,x'(t)\,dt = m\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\Big[\frac{x'(t)^2}{2}\Big]\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\,m\,x'(t_1)^2 - \frac{1}{2}\,m\,x'(t_0)^2,$$

sendo a última igualdade conseqüência do teorema fundamental do cálculo.

3-) *Velocidade de Escape.* De acordo com a *lei da gravitação de Newton*, a força com que a Terra atrai uma partícula de massa $m > 0$ é dada por $F(x) = f(x)\,\overrightarrow{i}$, onde $f : [R, \infty) \to \mathbb{R}$ é dada por:

$$f(x) = -\frac{G\,M\,m}{x^2},$$

sendo $G > 0$ a constante gravitacional universal, $M > 0$ a massa da Terra, $R > 0$ o raio da Terra e $x \in [R, \infty)$ a distância da partícula ao centro da Terra. Admita que a partícula seja lançada com velocidade $v > 0$ da superfície da Terra, e que o seu movimento $x = x(t)$, $t \geq 0$, seja governado pela segunda lei de Newton, i.e. $(\forall t \geq 0)\ mx''(t) = f\big(x(t)\big)$.



(a) Suponha que a partícula atinja uma altura máxima $h_{max} > R$ e depois retorne à Terra. Calcule h_{max} em função de v.

Sugestão: Calcule o trabalho realizado por F quando a partícula se desloca de $x = R$ até $x = h_{max}$, e aplique o teorema da energia cinética, levando em conta que para $x = h_{max}$ a velocidade $x'(t)$ da partícula se anula.

(b) Encontre o maior intervalo $[0, v_e[\subset \mathbb{R}$ no qual é possível definir a função $v \mapsto h_{max}(v)$, sendo h_{max} como no item anterior (i.e. encontre o maior $v_e \in \mathbb{R}$ para o qual faz sentido definir a função no referido intervalo). Verifique que $\lim_{v \to v_e} h_{max}(v) = +\infty$. (Resp.: $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$)

Observação: v_e chama-se **velocidade de escape** do campo gravitacional terrestre; é a menor velocidade inicial para a qual a partícula não retorna à Terra.

Resp.:

(a) Pelo teorema da energia cinética (vide questão anterior), tem-se:

$$-\frac{1}{2}\,mv^2 = \int_R^{h_{max}(v)} f(x)\,dx =$$
$$= -\int_R^{h_{max}(v)} \frac{G\,M\,m}{x^2}\,dx =$$
$$= \frac{G\,M\,m}{x}\Big]_R^{h_{max}(v)} = \frac{G\,M\,m}{h_{max}(v)} - \frac{G\,M\,m}{R}.$$

Portanto:

$$h_{max}(v) = \frac{2\,G\,M\,R}{2\,G\,M - R\,v^2}\,. \tag{1}$$

(b) O maior intervalo $[0, v_e[\subset \mathbb{R}$ no qual é possível definir a função $v \mapsto h_{max}(v)$, sendo h_{max} dada por (1), é aquele para o qual $v_e = \sqrt{\frac{2G\,M}{R}}$. Decorre imediatamente de (1) que $\lim\limits_{v \to v_e} h_{max}(v) = +\infty$.

4-) Suponha que uma partícula se desloca ao longo do eixo $0x$, segundo uma função horária $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ e sob ação de uma força $f(x)\,\overrightarrow{i}$, dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Admita que a dinâmica da partícula é governada por um modelo relativístico: sua massa m depende da sua velocidade v, segundo a função $m : (-c, c) \to \mathbb{R}$ definida por (dados $c > 0$ velocidade da luz e $m_0 > 0$ massa de repouso):

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,,$$

e sua função horária x satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}\big(m(x'(t))x'(t)\big) = f\big(x(t)\big).$$

Mostre que, se interpretarmos o trabalho $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ realizado pela força f quando a partícula se desloca de $x_0 = x(t_0)$ a $x_1 = x(t_1)$ como variação de energia ΔE, e se $\Delta m = m\big(x'(t_1)\big) - m\big(x'(t_0)\big)$, então:

$$\Delta E = \Delta m\; c^2.$$

Sugestão: Use o teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann e o teorema fundamental do cálculo.

Resp.: Como $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(x'/c)^2}} = m_0[1 - (x'/c)^2]^{-1/2}$, tem-se:

$$\begin{aligned} m' &= -\frac{1}{2}\,m_0[1 - (x'/c)^2]^{-3/2}\,\frac{(-2x'x'')}{c^2} = \\ &= \frac{m_0 x' x'' c}{[c^2 - (x')^2]^{3/2}}\,, \end{aligned}$$

portanto:

$$\begin{aligned} (mx')' &= m'x' + mx'' = \\ &= \frac{m_0 c x''}{[c^2 - (x')^2]^{1/2}} + \frac{m_0 (x')^2 x'' c}{[c^2 - (x')^2]^{3/2}} = \\ &= \frac{m_0 c x''[c^2 - (x')^2] + m_0 (x')^2 x'' c}{[c^2 - (x')^2]^{3/2}} = \\ &= \frac{m_0 c x'' c^2}{[c^2 - (x')^2]^{3/2}}\,. \end{aligned}$$

Assim, aplicando-se o teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann, conclui-se que o trabalho da força será dado por:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx &= \int_{t_0}^{t_1} f\big(x(t)\big)\,x'(t)\,dt = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} (mx')'\,x' = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \frac{m_0 c x' x'' c^2}{[c^2 - (x')^2]^{3/2}} = \\
&= c^2 \int_{t_0}^{t_1} m' = c^2\,[m(t_1) - m(t_0)].
\end{aligned}$$