**MAT 111 - Cálculo I - 2014**

Resolução de Algumas Questões da 2ª Lista de Exercícios

**1-)** (Conservação de Energia) Uma partícula de massa $m$ desloca-se sobre o eixo Ox sob ação da força resultante $F(x) = f(x)\overrightarrow{i}$, onde $f$ é suposta contínua no intervalo $J$. Seja $\mathrm{V}(x)$ uma função definida em $J$ tal que, para todo $x \in J$, $\mathrm{V}'(x) = -f(x)$ (diz-se que a força $F$ "deriva do potencial V"). Seja $x : I \to J$ a função de posição da partícula, definida no intervalo $I$ (i.e. para cada instante $t \in I$, $x(t) \in J$ é a posição da partícula no referido instante). Assuma que o movimento da partícula é governado pela lei de Newton:

$$mx''(t) = f\big(x(t)\big).$$

Demonstre que existe uma constante $E \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $t \in I$:

$$\frac{1}{2}\,mx'(t)^2 + \mathrm{V}\big(x(t)\big) = E.$$

Resp.: Seja $g : I \to \mathbb{R}$ dada por $\big(\forall\, t \in I\big)\, g(t) = \frac{1}{2}\,mx'(t)^2 + \mathrm{V}\big(x(t)\big)$. Então, pela regra da cadeia, $g$ é derivável e, para todo $t \in I$, $g'(t) = mx'(t)x''(t) + V'\big(x(t)\big) = mx'(t)x''(t) - f\big(x(t)\big)x'(t) = mx'(t)x''(t) - mx''(t)x'(t) = 0$. Assim, pelo teorema do valor médio, conclui-se que $g$ é uma função constante.

**2-)** O objetivo desta questão é demonstrar como a *lei da reflexão plana* e a *lei da refração de Snellius*, da Óptica Geométrica, podem ser obtidas como conseqüências do *princípio de Fermat*, segundo o qual "a trajetória dos raios de luz é aquela que minimiza o tempo de percurso".

(a) (Reflexão Plana) Sejam $P = (0, a)$ e $Q = (b, c)$, onde $a, b, c$ são números reais positivos. Seja $M = (x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$ (vide figura 1). Seja $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $d(x)$ é a soma das distâncias $d(P, M) + d(M, Q)$. Mostre que a função $d$ possui um único ponto de mínimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Verifique que $x_0 \in (0, b)$ e que $\alpha = \beta$ se $x = x_0$.

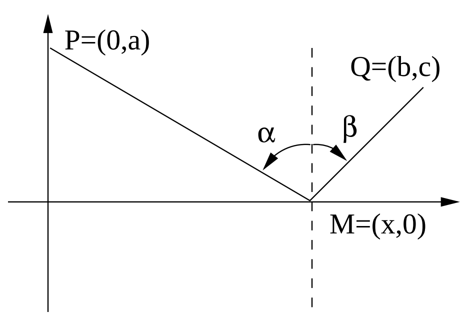



Figura 1: Reflexão Plana

Observação: Note que, admitindo que a luz se propague com velocidade constante no semi-plano superior, minimizar a soma das distâncias $d(P, M) + d(M, Q)$ é equivalente a minimizar o tempo que um raio de luz leva para ir de $P$ a $Q$, refletindo-se no eixo Ox.

(b) (Lei de Refração de Snellius) Sejam $P \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano superior e $Q \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano inferior, fixos (vide figura 2). Uma partícula vai de $P$ a um ponto $M = (x, 0)$ sobre o eixo Ox com velocidade constante $u$ e movimento retilíneo; em seguida, vai de $M$ até $Q$ com velocidade constante $v$, também em movimento retilíneo. Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $T(x)$ é o tempo de percurso de $P$ a $Q$. Mostre que $T$ possui um único ponto de mínimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Verifique que $x_0 \in (0, b)$ e que, se $x = x_0$, então:

$$\frac{\sin\alpha}{u} = \frac{\sin\beta}{v}.$$

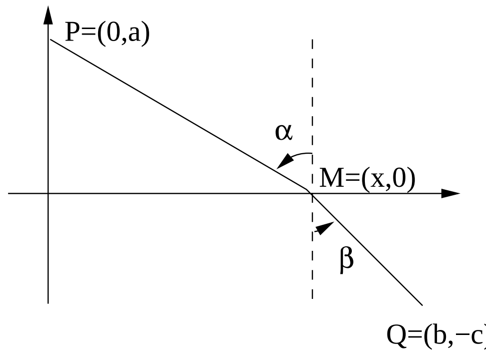



Figura 2: Refração

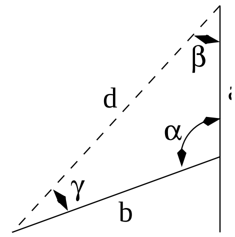
Resp.: Solução do item "b"

O tempo que a partícula gasta para ir de $P$ a $Q$, passando por $M = (x, 0)$, é dado por $\frac{d(P,M)}{u} + \frac{d(M,Q)}{v}$. Assim, $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $\big(\forall\, x \in \mathbb{R}\big)\, T(x) = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(x-b)^2+c^2}}{v}$. Portanto, pela regra da cadeia, $T$ é duas vezes derivável e suas derivadas primeira e segunda são dadas por, respectivamente, $\big(\forall\, x \in \mathbb{R}\big)\, T'(x) = \frac{1}{u}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{1}{v}\frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2+c^2}}$, $T''(x) = \frac{1}{u}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x^2+a^2} + \frac{1}{v}\frac{\sqrt{(x-b)^2+c^2}-\frac{(x-b)^2}{\sqrt{(x-b)^2+c^2}}}{(x-b)^2+c^2} = \frac{1}{u}\frac{a^2}{(x^2+a^2)^{3/2}} + \frac{1}{v}\frac{c^2}{((x-b)^2+c^2)^{3/2}}$. Assim, $T''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $T'(0) < 0$, $T'(b) > 0$ e $T'$ é contínua, pelo teorema do valor intermediário existe $x_0 \in (0, b)$ tal que $T'(x_0) = 0$; como $T'' > 0$, $T'$ é crescente e, em particular, injetiva, portanto $x_0$ é a única raiz de $T'$. Pelo teste da derivada segunda, conclui-se que $x_0$ é ponto de mínimo de $T$, e é o único ponto de mínimo, pois, pelo teorema de Fermat, se houvesse algum outro, também seria ponto crítico, e já vimos que $x_0$ é a única raiz de $T'$. Então está demonstrado que $T$ possui um único ponto de mínimo $x_0$, e $x_0$ pertence ao intervalo $(0, b)$. Além disso, como $\sin\alpha(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ e $\sin\beta(x) = -\frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2+c^2}}$, $T'(x_0) = 0$ é equivalente a $\frac{\sin\alpha(x_0)}{u} - \frac{\sin\beta(x_0)}{v} = 0$.

**3-)** Deve-se construir uma estrada ligando uma fábrica $A$ a uma ferrovia que passa por uma cidade $B$. Assumindo-se que a estrada e a ferrovia sejam ambas retilíneas, e que os custos de frete por unidade de distância sejam $m$ vezes maiores na estrada do que na ferrovia, encontre o ângulo $\alpha$ a que a estrada deve ser conectada à ferrovia de modo a minimizar o custo total do frete da fábrica até a cidade. Assuma $m > 1$.

Resp.:

Sejam: $d$ a distância da fábrica à cidade, $b$ a distância a ser percorrida na rodovia, $a$ a distância a ser percorrida na ferrovia, e ângulos como na figura abaixo.




Denotando por $C$ o custo total do frete e por $f$ o custo do frete por unidade de distância na ferrovia, tem-se: $C = fa + mfb$. Pelo teorema dos senos, tem-se:

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{d} = \frac{\sin\gamma}{a},$$

donde $b = \frac{d\sin\beta}{\sin\alpha}$, $a = \frac{d\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{d\sin\big(\pi-(\alpha+\beta)\big)}{\sin\alpha} = \frac{d(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)}{\sin\alpha}$. Portanto, $\frac{C}{f} = \frac{d(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)}{\sin\alpha} + m\frac{d\sin\beta}{\sin\alpha} = d\cos\beta + d\sin\beta\frac{m+\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Assim sendo, o problema se reduz a encontrar (caso exista) o(s) ponto(s) de mínimo da função:

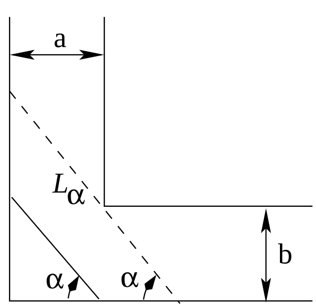
$$\begin{array}{rccc} F: & [\frac{\pi}{2},\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longmapsto & d\cos\beta + d\sin\beta\frac{m+\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{array}.$$

A referida função é derivável, e sua derivada é dada por $\big(\forall\,\alpha\in[\frac{\pi}{2},\pi)\big)$ $F'(\alpha) = d\sin\beta\frac{-\sin^2\alpha-\cos\alpha(m+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{d\sin\beta(-1-m\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$. Tomando $g:[\frac{\pi}{2},\pi)\to\mathbb{R}$ dada por $\big(\forall\,\alpha\in[\frac{\pi}{2},\pi)\big)$ $g(\alpha) = -1-m\cos\alpha$, $g$ é derivável e $\big(\forall\,\alpha\in[\frac{\pi}{2},\pi)\big)$ $g'(\alpha) = m\sin\alpha > 0$, logo $g$ é estritamente crescente; como $g$ se anula em $\arccos(-\frac{1}{m})$ (note que $m>1$ por hipótese, portanto $-\frac{1}{m}\in$ dom arccos), segue $g<0$ em $[\frac{\pi}{2},\arccos(-\frac{1}{m}))$ e $g>0$ em $(\arccos(-\frac{1}{m}),\pi)$, portanto $F'<0$ em $[\frac{\pi}{2},\arccos(-\frac{1}{m}))$ e $F'>0$ em $(\arccos(-\frac{1}{m}),\pi)$. Pelo teste da derivada primeira, conclui-se que $\arccos(-\frac{1}{m}) = \pi-\arccos(\frac{1}{m})$ é ponto de mínimo de $F$.

**4-)** Dois corredores com largura $a>0$ e $b>0$ intersectam-se em ângulo reto. Determine o comprimento máximo $l$ de uma escada que pode ser transportada horizontalmente de um corredor para o outro.

Resp.:

Sem perda de generalidade, pode-se assumir que a escada de comprimento máximo será transportada de um corredor para o outro de tal forma que suas extremidades se apóiem sobre as paredes externas, conforme a figura abaixo.



Ao ser feito o transporte, o ângulo $\alpha$ que a escada forma com a parede do corredor de largura $b$ variará de 0 a $\frac{\pi}{2}$. Para cada $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ fixo, o comprimento máximo $L_\alpha$ da escada que pode ser colocada nos corredores, formando um ângulo $\alpha$ com o corredor de largura $b$, será, conforme a figura, $\frac{b}{\sin\alpha} + \frac{a}{\cos\alpha}$. Assim, o transporte será possível se, e somente se, o comprimento da escada for menor ou igual a $L_\alpha$, para todo $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. O máximo comprimento da escada que pode ser transportada será, portanto, o valor mínimo (caso exista) da função:

$$\begin{array}{rccc} f: & (0, \frac{\pi}{2}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longmapsto & \frac{b}{\sin\alpha} + \frac{a}{\cos\alpha} \end{array}.$$

Tal função é derivável e sua derivada é dada por $\left(\forall\, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})\right) f'(\alpha) = -\frac{b\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{-b\cos^3\alpha + a\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$. Seja $g : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ dada por $\left(\forall\, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})\right) g(\alpha) = -b\cos^3\alpha + a\sin^3\alpha$. Esta função é derivável e sua derivada é dada por $\left(\forall\, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})\right) g'(\alpha) = 3b\cos^2\alpha\sin\alpha + 3a\sin^2\alpha\cos\alpha$, portanto $g' > 0$ em $(0, \frac{\pi}{2})$, donde $g$ é estritamente crescente. Como $g$ se anula em $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $\tan\alpha = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, i.e. $\alpha = \arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, segue que $g < 0$ em $(0, \arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}})$ e $g > 0$ em $(\arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}, \frac{\pi}{2})$. Logo, $f' < 0$ em $(0, \arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}})$ e $f' > 0$ em $(\arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}, \frac{\pi}{2})$. Então, pelo teste da derivada primeira, $\arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ é ponto de mínimo de $f$, logo o valor mínimo de $f$ é $f(\arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}) = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$.