Elementos de Lógica Matemática

Uma Breve Iniciação

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

Departamento de Matemática

IME - USP

Vamos aprender a falar aramaico?

$$\forall \epsilon > 0 \left(\exists \delta > 0 \left(\forall x \left(0 < |x| < \delta \rightarrow |x^2| < \epsilon \right) \right) \right)$$

Proposições

- Uma **proposição** é uma afirmação passível de assumir valor lógico *verdadeiro* ou *falso*;

Proposições

- Uma **proposição** é uma afirmação passível de assumir valor lógico *verdadeiro* ou *falso*;
- Toda proposição é verdadeira ou falsa (*princípio do terceiro excluído*);

Proposições

- Uma **proposição** é uma afirmação passível de assumir valor lógico *verdadeiro* ou *falso*;
- Toda proposição é verdadeira ou falsa (*princípio do terceiro excluído*);
- Uma proposição não pode ser verdadeira E falsa (*princípio da não-contradição*).

Exemplos de Proposições

- $2 > 1$ (V);

Exemplos de Proposições

- $2 > 1$ (V);
- $5 = 1$ (F).

Conectivos Lógicos

Proposições podem ser conectadas através dos seguintes *conectivos*:

Conectivos Lógicos

Proposições podem ser conectadas através dos seguintes *conectivos*:

- “ $\neg$ ” ou “!” (negação);

Conectivos Lógicos

Proposições podem ser conectadas através dos seguintes *conectivos*:

- “ $\neg$ ” ou “!” (negação);
- “ $\wedge$ ” (conectivo “e”);

Conectivos Lógicos

Proposições podem ser conectadas através dos seguintes *conectivos*:

- “ $\neg$ ” ou “!” (negação);
- “ $\wedge$ ” (conectivo “e”);
- “ $\vee$ ” (conectivo “ou”);

Conectivos Lógicos

Proposições podem ser conectadas através dos seguintes *conectivos*:

- “ $\neg$ ” ou “!” (negação);
- “ $\wedge$ ” (conectivo “e”);
- “ $\vee$ ” (conectivo “ou”);
- “ $\rightarrow$ ” (conectivo “implica”);

Conectivos Lógicos

Proposições podem ser conectadas através dos seguintes *conectivos*:

- “ $\neg$ ” ou “!” (negação);
- “ $\wedge$ ” (conectivo “e”);
- “ $\vee$ ” (conectivo “ou”);
- “ $\rightarrow$ ” (conectivo “implica”);
- “ $\leftrightarrow$ ” (conectivo “se, e somente se”).

Conectivos Lógicos

Sejam “P” e “Q” proposições.

Conectivos Lógicos

Sejam “P” e “Q” proposições.

- “ $\neg P$ ” é verdadeira se “P” for falsa, e vice-versa;

Conectivos Lógicos

Sejam “P” e “Q” proposições.

- “ $\neg P$ ” é verdadeira se “P” for falsa, e vice-versa;
- “P e Q” é verdadeira se ambas forem verdadeiras, e falsa caso contrário;

Conectivos Lógicos

Sejam “P” e “Q” proposições.

- “ $\neg P$ ” é verdadeira se “P” for falsa, e vice-versa;
- “P e Q” é verdadeira se ambas forem verdadeiras, e falsa caso contrário;
- “P ou Q” é verdadeira se pelo menos uma delas for verdadeira, e falsa caso contrário.

Conectivos Lógicos

- “ $P \rightarrow Q$ ” é a mesma coisa que “ $(\neg P) \text{ ou } Q$ ”; ou seja, é falsa se o lado esquerdo for verdadeiro e o lado direito falso, e verdadeira em qualquer outro caso; exemplos:

Conectivos Lógicos

- “ $P \rightarrow Q$ ” é a mesma coisa que “ $(\neg P) \text{ ou } Q$ ”; ou seja, é falsa se o lado esquerdo for verdadeiro e o lado direito falso, e verdadeira em qualquer outro caso; exemplos:
- “ $2 > 1 \rightarrow 3 > 1$ ” (V);

Conectivos Lógicos

- “ $P \rightarrow Q$ ” é a mesma coisa que “ $(\neg P) \text{ ou } Q$ ”; ou seja, é falsa se o lado esquerdo for verdadeiro e o lado direito falso, e verdadeira em qualquer outro caso; exemplos:
  - “ $2 > 1 \rightarrow 3 > 1$ ” (V);
  - “ $2 > 1 \rightarrow 1 > 3$ ” (F);

Conectivos Lógicos

- “ $P \rightarrow Q$ ” é a mesma coisa que “ $(\neg P) \text{ ou } Q$ ”; ou seja, é falsa se o lado esquerdo for verdadeiro e o lado direito falso, e verdadeira em qualquer outro caso; exemplos:
  - “ $2 > 1 \rightarrow 3 > 1$ ” (V);
  - “ $2 > 1 \rightarrow 1 > 3$ ” (F);
  - “ $5 = 2 \rightarrow 0 = 1$ ” (V);

Conectivos Lógicos

- “ $P \rightarrow Q$ ” é a mesma coisa que “ $(\neg P) \text{ ou } Q$ ”; ou seja, é falsa se o lado esquerdo for verdadeiro e o lado direito falso, e verdadeira em qualquer outro caso; exemplos:
  - “ $2 > 1 \rightarrow 3 > 1$ ” (V);
  - “ $2 > 1 \rightarrow 1 > 3$ ” (F);
  - “ $5 = 2 \rightarrow 0 = 1$ ” (V);
- “ $P \leftrightarrow Q$ ” é a mesma coisa que “ $P \rightarrow Q$ e $Q \rightarrow P$ ”, ou seja, é verdadeira se ambas forem verdadeiras ou ambas forem falsas.

Variáveis Livres

Seja P uma expressão na qual ocorre uma ou mais variáveis $x, y, z, \dots$. Dizemos que uma dada ocorrência de uma variável x na expressão P é *livre* se x não está no escopo de algum quantificador $\forall$ (*quantificador universal*) ou $\exists$ (*quantificador existencial*).

Variáveis Livres

Exemplos:

Variáveis Livres

Exemplos:

- $x > 0$

Variáveis Livres

Exemplos:

- $x > 0$ (x é variável livre);

Variáveis Livres

Exemplos:

- $x > 0$ (x é variável livre);
- $\exists y(y > x)$

Variáveis Livres

Exemplos:

- $x > 0$ (x é variável livre);
- $\exists y(y > x)$ (x é livre, y é não-livre);

Variáveis Livres

Exemplos:

- $x > 0$ (x é variável livre);
- $\exists y(y > x)$ (x é livre, y é não-livre);
- $\forall x(\exists y(y > x))$

Variáveis Livres

Exemplos:

- $x > 0$ (x é variável livre);
- $\exists y(y > x)$ (x é livre, y é não-livre);
- $\forall x(\exists y(y > x))$ (nenhuma das variáveis é livre);

Variáveis Livres

Exemplos:

- $x > 0$ (x é variável livre);
- $\exists y(y > x)$ (x é livre, y é não-livre);
- $\forall x(\exists y(y > x))$ (nenhuma das variáveis é livre);
- $\forall \epsilon(\exists \delta(0 < |x - a| < \delta \rightarrow |x^2 - a^2| < \epsilon))$

Variáveis Livres

Exemplos:

- $x > 0$ (x é variável livre);
- $\exists y(y > x)$ (x é livre, y é não-livre);
- $\forall x(\exists y(y > x))$ (nenhuma das variáveis é livre);
- $\forall \epsilon(\exists \delta(0 < |x - a| < \delta \rightarrow |x^2 - a^2| < \epsilon))$
(x e a são livres, ϵ e δ são não-livres).

Sentenças abertas

Uma **expressão proposicional** ou **sentença aberta** é uma expressão P na qual ocorre uma ou mais variáveis $x, y, z, \dots$, sendo pela menos uma ocorrência livre.

Sentenças abertas

Uma **expressão proposicional** ou **sentença aberta** é uma expressão P na qual ocorre uma ou mais variáveis $x, y, z, \dots$, sendo pela menos uma ocorrência livre.

Usaremos daqui em diante a notação $P(x_1, \dots, x_n)$ para designar uma sentença aberta na qual as variáveis livres são $x_1, \dots, x_n$.

Expressões Proposicionais e Proposições

Podemos construir *proposições* (i.e. sentenças que podem assumir valor lógico verdadeiro ou falso) a partir de uma dada sentença aberta P , de duas maneiras:

Expressões Proposicionais e Proposições

Podemos construir *proposições* (i.e. sentenças que podem assumir valor lógico verdadeiro ou falso) a partir de uma dada sentença aberta P , de duas maneiras:

- atribui-se valores às variáveis livres de P , i.e. substitui-se as variáveis livres de P por elementos de um dado conjunto, o *universo* das variáveis;

Expressões Proposicionais e Proposições

Podemos construir *proposições* (i.e. sentenças que podem assumir valor lógico verdadeiro ou falso) a partir de uma dada sentença aberta P , de duas maneiras:

- atribui-se valores às variáveis livres de P , i.e. substitui-se as variáveis livres de P por elementos de um dado conjunto, o *universo* das variáveis;
- quantifica-se as variáveis livres de P , usando-se os **quantificadores** $\forall$ ou $\exists$.

O Quantificador Existencial (“ $\exists$ ”)

Sejam x uma variável cujo universo é um dado conjunto $\mathcal{U}$, e $P(x)$ uma sentença aberta. Considere a proposição:

$$\exists x (P(x))$$

O Quantificador Existencial (“ $\exists$ ”)

Sejam x uma variável cujo universo é um dado conjunto $\mathcal{U}$, e $P(x)$ uma sentença aberta. Considere a proposição:

$$\exists x (P(x))$$

Por definição, a proposição acima é *verdadeira* se existir algum elemento do conjunto $\mathcal{U}$ tal que a substituição da variável livre x de $P(x)$ por este elemento resulte numa proposição verdadeira. Caso contrário, diz-se que $\exists x (P(x))$ é uma proposição falsa.

Exemplos

Nos exemplos a seguir, x e y são variáveis reais (i.e. cujo universo é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais).

Exemplos

Nos exemplos a seguir, x e y são variáveis reais (i.e. cujo universo é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais).

- $\exists x(x > 0)$

Exemplos

Nos exemplos a seguir, x e y são variáveis reais (i.e. cujo universo é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais).

- $\exists x(x > 0)$ (V);

Exemplos

Nos exemplos a seguir, x e y são variáveis reais (i.e. cujo universo é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais).

- $\exists x(x > 0)$ (V);
- $\exists x(x^2 < 0)$

Exemplos

Nos exemplos a seguir, x e y são variáveis reais (i.e. cujo universo é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais).

- $\exists x(x > 0)$ (V);
- $\exists x(x^2 < 0)$ (F);

Exemplos

Nos exemplos a seguir, x e y são variáveis reais (i.e. cujo universo é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais).

- $\exists x(x > 0)$ (V);
- $\exists x(x^2 < 0)$ (F);
- $\exists x(\exists y(y + 1 < x))$

Exemplos

Nos exemplos a seguir, x e y são variáveis reais (i.e. cujo universo é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais).

- $\exists x(x > 0)$ (V);
- $\exists x(x^2 < 0)$ (F);
- $\exists x(\exists y(y + 1 < x))$ (V).

O Quantificador Universal (“ $\forall$ ”)

Sejam x uma variável cujo universo é um dado conjunto $\mathcal{U}$, e $P(x)$ uma sentença aberta. Considere a proposição:

$$\forall x (P(x))$$

O Quantificador Universal (“ $\forall$ ”)

Sejam x uma variável cujo universo é um dado conjunto $\mathcal{U}$, e $P(x)$ uma sentença aberta. Considere a proposição:

$$\forall x (P(x))$$

Por definição, a proposição acima é *verdadeira* se a substituição da variável livre x de $P(x)$ por qualquer elemento do conjunto universo $\mathcal{U}$ resultar numa proposição verdadeira. Caso contrário, diz-se que $\forall x (P(x))$ é uma proposição falsa.

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x(x > 0)$

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x(x > 0)$ (F);

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x(x > 0)$ (F);
- $\forall x(x^2 \geq 0)$

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x(x > 0)$ (F);
- $\forall x(x^2 \geq 0)$ (V);

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x(x > 0)$ (F);
- $\forall x(x^2 \geq 0)$ (V);
- $\forall x(\forall y(x > y))$

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x(x > 0)$ (F);
- $\forall x(x^2 \geq 0)$ (V);
- $\forall x(\forall y(x > y))$ (F);

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x(x > 0)$ (F);
- $\forall x(x^2 \geq 0)$ (V);
- $\forall x(\forall y(x > y))$ (F);
- $\forall x(\exists y(x > y))$

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x(x > 0)$ (F);
- $\forall x(x^2 \geq 0)$ (V);
- $\forall x(\forall y(x > y))$ (F);
- $\forall x(\exists y(x > y))$ (V);

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x(x > 0)$ (F);
- $\forall x(x^2 \geq 0)$ (V);
- $\forall x(\forall y(x > y))$ (F);
- $\forall x(\exists y(x > y))$ (V);
- $\exists y(\forall x(x > y))$

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x(x > 0)$ (F);
- $\forall x(x^2 \geq 0)$ (V);
- $\forall x(\forall y(x > y))$ (F);
- $\forall x(\exists y(x > y))$ (V);
- $\exists y(\forall x(x > y))$ (F).

Implicações Lógicas

Sejam $P(x_1, \dots, x_n)$ e $Q(x_1, \dots, x_n)$ sentenças abertas e $\mathcal{U}$ um conjunto.

Implicações Lógicas

Sejam $P(x_1, \dots, x_n)$ e $Q(x_1, \dots, x_n)$ sentenças abertas e $\mathcal{U}$ um conjunto.

- Diz-se que P implica logicamente Q , no universo $\mathcal{U}$, e escreve-se $P \Rightarrow Q$, se a seguinte proposição for verdadeira, tomando-se $\mathcal{U}$ como universo das variáveis $x_1, \dots, x_n$:

$$\forall x_1 (\dots \forall x_n (P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow Q(x_1, \dots, x_n)) \dots).$$

Implicações Lógicas

- Noutras palavras, isto significa que quaisquer valores de $x_1, \dots, x_n$ no universo $\mathcal{U}$ que tornam P verdadeira também tornam Q verdadeira.

Implicações Lógicas

- Noutras palavras, isto significa que quaisquer valores de $x_1, \dots, x_n$ no universo $\mathcal{U}$ que tornam P verdadeira também tornam Q verdadeira.
- Diz-se que P é logicamente equivalente a Q , e escreve-se $P \Leftrightarrow Q$, se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$.

Exemplos

- Seja $\mathcal{U}$ o conjunto dos triângulos do plano.
Então:
 T retângulo $\Rightarrow$ o quadrado de um dos lados de T é a soma dos quadrados dos outros dois.

Exemplos

- Seja $\mathcal{U}$ o conjunto dos triângulos do plano. Então:

T retângulo $\Rightarrow$ o quadrado de um dos lados de T é a soma dos quadrados dos outros dois.

Com efeito, no universo $\mathcal{U}$, a seguinte proposição é verdadeira:

$\forall T(T \text{ retângulo} \rightarrow \text{o quadrado de um dos lados de } T \text{ é a soma dos quadrados dos outros dois})$.

Exemplos

- Em $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, $0 \leq x \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 4$, mas $x^2 \leq 4 \not\Rightarrow 0 \leq x \leq 2$.

Exemplos

- Em $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, $0 \leq x \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 4$, mas $x^2 \leq 4 \not\Rightarrow 0 \leq x \leq 2$.
- Um **teorema** é um enunciado da forma $H \Rightarrow T$, onde H e T são sentenças chamadas, respectivamente, de **hipótese** e **tese**.

Exercícios

Como dizer “não”

Sejam, P, Q proposições. Verifique que são verdadeiras:

Como dizer “não”

Sejam, P, Q proposições. Verifique que são verdadeiras:

- $(\neg(P \wedge Q)) \leftrightarrow ((\neg P) \vee (\neg Q))$

Como dizer “não”

Sejam, P, Q proposições. Verifique que são verdadeiras:

- $(\neg(P \wedge Q)) \leftrightarrow ((\neg P) \vee (\neg Q))$
- $(\neg(P \vee Q)) \leftrightarrow ((\neg P) \wedge (\neg Q))$

Como dizer “não”

Sejam, P, Q proposições. Verifique que são verdadeiras:

- $(\neg(P \wedge Q)) \leftrightarrow ((\neg P) \vee (\neg Q))$
- $(\neg(P \vee Q)) \leftrightarrow ((\neg P) \wedge (\neg Q))$
- $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg Q) \rightarrow (\neg P))$

Como dizer “não”

Sejam, $P(x)$, $Q(x)$ sentenças abertas, $\mathcal{U}$ o universo de x . Verifique que são verdadeiras:

Como dizer “não”

Sejam, $P(x), Q(x)$ sentenças abertas, $\mathcal{U}$ o universo de x . Verifique que são verdadeiras:

- $(\neg(\forall x(P(x)))) \leftrightarrow (\exists x(\neg P(x)))$

Como dizer “não”

Sejam, $P(x), Q(x)$ sentenças abertas, $\mathcal{U}$ o universo de x . Verifique que são verdadeiras:

- $(\neg(\forall x(P(x)))) \leftrightarrow (\exists x(\neg P(x)))$
- $(\neg(\exists x(P(x)))) \leftrightarrow (\forall x(\neg P(x)))$

Encontre a negação das seguintes proposições. A seguir, decida se são verdadeiras ou falsas (todas as variáveis são reais); justifique.

1. $\forall x(\exists y(y > x))$.

2. $\forall \epsilon > 0(\exists \delta > 0(\forall x(0 < |x| < \delta \rightarrow |5x| < \epsilon)))$.

OBS.: usa-se correntemente as abreviações:

“ $\exists \delta > 0(P(\delta))$ ” para “ $\exists \delta(\delta > 0 \wedge P(\delta))$ ”;

“ $\exists \delta \in A(P(\delta))$ ” para “ $\exists \delta(\delta \in A \wedge P(\delta))$ ”;

“ $\forall \epsilon > 0(P(\epsilon))$ ” para “ $\forall \epsilon(\epsilon > 0 \rightarrow P(\epsilon))$ ”, etc.

Respostas:

1. Verdadeira; dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer, tome $y = x + 2 > x$. Negação: $\exists x (\forall y (y \leq x))$.

2. Verdadeira; dado $\epsilon > 0$ qualquer, tome $\delta = \epsilon/5$. Negação:

$$\exists \epsilon > 0 \left(\forall \delta > 0 \left(\exists x (0 < |x| < \delta \wedge |5x| \geq \epsilon) \right) \right).$$

Encontre a negação das seguintes proposições. A seguir, decida se são verdadeiras ou falsas (todas as variáveis são reais); justifique.

1. $\forall \epsilon > 0 \left(\exists \delta > 0 \left(\forall x (0 < |x| < \delta \rightarrow |x^2| < \epsilon) \right) \right)$.

2. $\forall \epsilon > 0 \left(\exists \delta > 0 \left(\forall x (0 < |x| < \delta \rightarrow |x^2 - 1| < \epsilon) \right) \right)$.

Respostas:

1. Verdadeira: dado $\epsilon > 0$ qualquer, tome $\delta = \sqrt{\epsilon}$. Negação:

$$\exists \epsilon > 0 \left(\forall \delta > 0 \left(\exists x (0 < |x| < \delta \wedge |x^2| \geq \epsilon) \right) \right).$$

2. Falsa (sugestão: verifique que a negação é verdadeira). Negação:

$$\exists \epsilon > 0 \left(\forall \delta > 0 \left(\exists x (0 < |x| < \delta \wedge |x^2 - 1| \geq \epsilon) \right) \right).$$

Referências

- Jaime Ferreira de Campos, *Elementos de Lógica Matemática e Teoria dos Conjuntos*, in *Lições de Análise Real*, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2001.
<http://www.math.ist.utl.pt/jmatos/ltc/ltc.pdf>
- Edgar de Alencar Filho, *Iniciação à Lógica Matemática*, Nobel, São Paulo, 1986.