

Limites e Continuidade

Gláucio Terra

`glaucio@ime.usp.br`

Departamento de Matemática

IME - USP

Revisão

Limite de uma Função num Ponto

DEFINIÇÃO Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a pto. de acumulação de A , $L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

significa: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

Regras para Calcular Limites

- $\lim_{x \rightarrow a} c = c$
- $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)^n) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n$
- $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$

Continuidade

DEFINIÇÃO Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$. Diz-se que f é **contínua em a** se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Isto é equivalente a:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Continuidade

DEFINIÇÃO Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$. Diz-se que f é **contínua em a** se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Isto é equivalente a:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Diz-se que f é **contínua** se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

Propriedades das Funções Contínuas

TEOREMA

- Somas, diferenças, produtos e quocientes de funções contínuas são funções contínuas.

Propriedades das Funções Contínuas

TEOREMA

- Somas, diferenças, produtos e quocientes de funções contínuas são funções contínuas.
- A composta de funções contínuas é uma função contínua.

Exemplos de Funções Contínuas

- Funções polinomiais;

Exemplos de Funções Contínuas

- Funções polinomiais;
- Funções racionais;

Exemplos de Funções Contínuas

- Funções polinomiais;
- Funções racionais;
- Funções trigonométricas;

Exemplos de Funções Contínuas

- Funções polinomiais;
- Funções racionais;
- Funções trigonométricas;
- Funções raízes.

Limites Laterais, Limites no Infinito, Limites Infinitos

Pontos de Acumulação

DEFINIÇÃO Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que a é:

- **ponto de acumulação** de A se, $\forall \delta > 0$,
 $V'_\delta(a) \cap A \neq \emptyset$.

Pontos de Acumulação

DEFINIÇÃO Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que a é:

- **ponto de acumulação** de A se, $\forall \delta > 0$, $V'_\delta(a) \cap A \neq \emptyset$.
- **ponto de acumulação à direita** de A se, $\forall \delta > 0$, $(a, a + \delta) \cap A \neq \emptyset$.

Pontos de Acumulação

DEFINIÇÃO Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que a é:

- **ponto de acumulação** de A se, $\forall \delta > 0$, $V'_\delta(a) \cap A \neq \emptyset$.
- **ponto de acumulação à direita** de A se, $\forall \delta > 0$, $(a, a + \delta) \cap A \neq \emptyset$.
- **ponto de acumulação à esquerda** de A se, $\forall \delta > 0$, $(a - \delta, a) \cap A \neq \emptyset$.

Limites Laterais

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a pto. de acumulação à direita de A , $L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

significa:

Limites Laterais

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a pto. de acumulação à direita de A , $L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

significa: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, x \in (a, a + \delta) \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Analogamente, se a for pto. de acumulação à esquerda de A ,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

significa: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, x \in (a - \delta, a) \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

Limite de uma função num ponto e limites laterais

Limite de uma função num ponto e limites laterais

TEOREMA Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a pto. de acumulação à esquerda e à direita de A , $L \in \mathbb{R}$. Então, são equivalentes:

Limite de uma função num ponto e limites laterais

TEOREMA Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a pto. de acumulação à esquerda e à direita de A , $L \in \mathbb{R}$. Então, são equivalentes:

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L;$

Limite de uma função num ponto e limites laterais

TEOREMA Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a pto. de acumulação à esquerda e à direita de A , $L \in \mathbb{R}$. Então, são equivalentes:

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$;
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$.

Limites no Infinito

Limites no Infinito

DEFINIÇÃO Sejam $A \subset \mathbb{R}$ ilimitado superiormente, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

significa:

Limites no Infinito

DEFINIÇÃO Sejam $A \subset \mathbb{R}$ ilimitado superiormente, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

significa:

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in A, x > M \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Analogamente, se A for ilimitado inferiormente,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

significa:

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in A, x < -M \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Regras para Cálculo de Limites Laterais e Limites no Infinito

Regras para Cálculo de Limites Laterais e Limites no Infinito

Valem as mesmas regras já vistas para o cálculo do limite de uma função num ponto, bastando substituir-se “ $\lim_{x \rightarrow a}$ ” por “ $\lim_{x \rightarrow a^+}$ ” ou “ $\lim_{x \rightarrow a^-}$ ” ou “ $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ ” ou “ $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ ”.

Limites Infinitos

Limites Infinitos

DEFINIÇÃO Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a pto. de acumulação de A .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

significa:

Limites Infinitos

DEFINIÇÃO Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a pto. de acumulação de A .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

significa: $\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, 0 < |x - a| < \delta \rightarrow f(x) > M$

Limites Infinitos

DEFINIÇÃO Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a pto. de acumulação de A .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

significa: $\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, 0 < |x - a| < \delta \rightarrow f(x) > M$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

significa: $\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, 0 < |x - a| < \delta \rightarrow f(x) < -M$

Limites Infinitos

OBSERVAÇÃO: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ significa, em particular, $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Propriedades dos Limites Infinitos

1. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e g for limitada inferiormente numa vizinhança de a , então $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = +\infty$.

Propriedades dos Limites Infinitos

1. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e g for limitada inferiormente numa vizinhança de a , então $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = +\infty$.
2. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e $\exists c > 0$ tal que $g \geq c$ numa vizinhança de a , então $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = +\infty$.

Exercícios

Exercício 1

Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 + x^3 - x^2 + 1}{2x^4 + 6x^2 + 3}$$

Exercício 2

Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 + x^3 - x^2 + 1}{x^3 + 6x^2 + 3}$$