MAT111 - Cálculo Diferencial e Integral I
SUB - 3 de outubro de 2014
Professor: Gláucio Terra

Nome:____	Nota:
No. USP:____________________RG:____________________	
Assinatura:____	

Justifique todas as suas respostas. As questões podem ser resolvidas a lápis e em qualquer ordem. Boa prova!

QUESTÃO **1.** (2,0) *Determine a equação da(s) reta(s) que são simultaneamente tangentes aos gráficos de $f(x) = \frac{1}{x}$ e de $g(x) = x^2$.*

RESPOSTA: Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, a equação da reta tangente ao gráfico de $g(x) = x^2$ no ponto $\big(x_0, g(x_0)\big)$ é $y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$, i.e. $y = (2x_0)x - x_0^2$. Por outro lado, dado $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $\big(x_1, f(x_1)\big)$ é $y - \frac{1}{x_1} = -\frac{1}{x_1^2}(x - x_1)$, i.e. $y = -\frac{1}{x_1^2}x + \frac{2}{x_1}$. Assim, uma condição necessária e suficiente para que uma reta de equação $y = px + q$ pertença à intersecção dos dois feixes de retas tangentes é $(\exists x_0 \in \mathbb{R}, \exists x_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\})p = 2x_0 = -\frac{1}{x_1^2}$ e $q = -x_0^2 = \frac{2}{x_1}$, o que é equivalente a $x_0 = -2$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $p = -4$ e $q = -4$. Assim, $y = -4x - 4$ é a única reta simultaneamente tangente aos dois gráficos.

QUESTÃO **2.** (2,0) *Determine a razão entre a altura e o diâmetro da base do cilindro de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio R.*

RESPOSTA: Uma condição necessária e suficiente para que um cilindro cujo raio da base é r e cuja altura é h possa ser inscrito numa esfera de raio R é $r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2$, i.e. $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$. Assim, o volume de um tal cilindro será dado por $V = \pi r^2 h = \pi R^2 h - \pi\frac{h^3}{4}$. O problema se reduz, pois, a se encontrar (caso exista) o(s) ponto(s) de máximo da função $V :]0, 2R[\to \mathbb{R}$ dada por $V(h) = \pi R^2 h - \pi\frac{h^3}{4}$. Tal função é derivável até segunda ordem e suas derivadas primeira e segunda são dadas por, respectivamente, $\big(\forall\, h \in]0, 2R[\big)$ $V'(h) = \pi R^2 - \pi\frac{3h^2}{4}$, $V''(h) = -\pi\frac{3h}{2}$. Como V' se anula em $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ e $V'' < 0$ em $]0, 2R[$, segue-se do teste da derivada segunda que $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ é o ponto de máximo global de V. Assim, a razão entre a altura e o diâmetro da base do cilindro de maior volume inscrito numa esfera de raio R é dada por $h/2r = \frac{2R}{\sqrt{3}} / 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

QUESTÃO **3.** (2,0) *Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique (se verdadeiro) ou apresente um contra-exemplo (se falso).*

(a) *Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f é derivável.*

RESPOSTA: *Falso. Contra-exemplo: $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$, a qual é contínua e não é derivável no zero.*

(b) *Se* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *é derivável e* $x_0 \in]0,1[$ *é tal que* $f'(x_0) = 0$*, então* x_0 *é ponto de máximo ou de mínimo local de* f*.*

Resposta: *Falso. Contra-exemplo:* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = (x - \frac{1}{2})^3$*, a qual é derivável e tem um ponto crítico em* $x_0 = 1/2 \in]0,1[$*, o qual não é ponto de máximo nem de mínimo local de* f*.*

(c) *Se* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *é uma função derivável cuja derivada se anula identicamente, então* f *é uma função constante.*

Resposta: *Falso. Contra-exemplo:* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 0$ *se* $x < 0$ *e* $f(x) = 1$ *se* $x > 0$*.*

(d) *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *admite uma antiderivada, então* f *é contínua.* Resposta: *Falso. Conforme visto em aula, obtém-se um contra-exemplo tomando-se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a derivada de* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $F(x) = x^2 \sin x$*, se* $x \neq 0$*, e* $F(0) = 0$*.*

Questão **4.** (2 ptos.) *Desenhe a região do plano delimitada pela curva* $y = x^3 - x$ *e por sua reta tangente no ponto de abscissa* $x = -1$*. Calcule a área desta região.*

Resposta: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - x$, de modo que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -1 tem equação $y = 2x + 2$. A referida reta intersecta o gráfico de f nos pontos -1 e 2, sendo a área pedida é dada por $\int_{-1}^{2} [(2x+2) - (x^3 - x)]\, \mathrm{d}x = 27/4$, tendo sido calculada a última integral pelo TFC.

Questão **5.** (2,0) *Calcule* $\displaystyle\int \frac{x^4 + x^2 - x + 1}{x^3 + x}\, \mathrm{d}x$*.*

Resposta: Basta aplicar o algoritmo da divisão e, a seguir, decompor em frações parciais:

$$\frac{x^4 + x^2 - x + 1}{x^3 + x} = x + \frac{-x + 1}{x(x^2 + 1)} = x + \frac{1}{x} - \frac{x + 1}{x^2 + 1},$$

donde:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 + x^2 - x + 1}{x^3 + x}\, \mathrm{d}x &= \int \Big(x + \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}\Big)\, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln|x| - \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} - \arctan x + k.\end{aligned}$$