MAT111 - Cálculo Diferencial e Integral I
REC - 10 de outubro de 2014
Professor: Gláucio Terra

Nome:______________________________ Nota:
No. USP:______________RG:______________
Assinatura:______________________________

Justifique todas as suas respostas. As questões podem ser resolvidas a lápis e em qualquer ordem. Boa prova!

QUESTÃO **1.** (3 ptos.) *Seja* $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1 + 3\ln(x+2)$.

(a) Determine o domínio de f e os intervalos de crescimento e decrescimento de f.
(b) Determine os intervalos em que f tem concavidade para cima e os intervalos em que f tem concavidade para baixo.
(c) Determine, caso existam, as assíntotas verticais, horizontais e as da forma $y = ax+b$, com $a \neq 0$, de f.
(d) Utilizando as informações acima, esboce o gráfico de f.

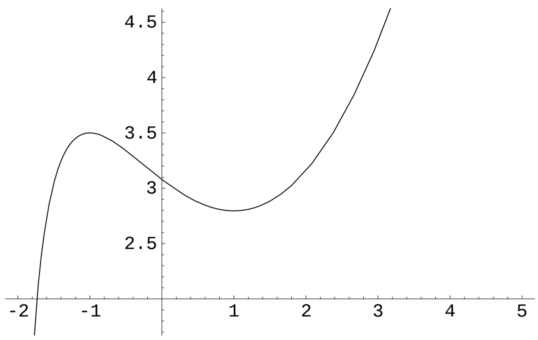
RESPOSTA:

(a) Tem-se: $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$; a função em apreço é derivável e sua função derivada é dada por $(\forall x > -2) f'(x) = x - 2 + \frac{3}{x+2} = \frac{x^2-1}{x+2}$. Assim, f' tem sinal positivo nos intervalos $(-2,-1)$ e $(1,+\infty)$ e sinal negativo no intervalo $(-1,1)$. Por corolário do teorema do valor médio, segue-se que f é estritamente crescente nos intervalos $(-2,-1]$ e $[1,+\infty)$, e estritamente decrescente no intervalo $[-1,1]$.

(b) f é derivável até segunda ordem, e $f'' : (-2,+\infty) \to \mathbb{R}$ é dada por $f''(x) = 1 - \frac{3}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x+2)^2}$, onde $x_0 = -2-\sqrt{3}$ e $x_1 = -2+\sqrt{3}$ (portanto $x_0 < -2$ e $-1 < x_1 < 0$). Assim, f'' tem sinal positivo no intervalo $(x_1,+\infty)$ (i.e. f tem concavidade para cima no referido intervalo) e sinal negativo no intervalo $(-2,x_1)$ (i.e. f tem concavidade para baixo no referido intervalo).

(c) Tem-se: $\lim_{x\to-2} f(x) = -\infty$, logo a reta $x=-2$ é uma assíntota vertical. Uma aplicação da segunda regra de l'Hôpital fornece $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2} = 0$, logo $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\big(x/2 - 2 + 1/x + 3\frac{\ln(x+2)}{x}\big) = +\infty$, portanto f não tem assíntota à direita. Note que, em particular, segue-se do cálculo do último limite que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\big(x \cdot \frac{f(x)}{x}\big) = +\infty$.

(d) O gráfico de f é conforme esboçado na figura abaixo:



Questão **2.** (2,0) *Calcule o seguinte limite, caso exista:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \cos(t^2)dt}{\displaystyle\int_0^{x} e^{-t^2}dt}.$$

Resposta: Pelo 2o. TFC e pela regra da cadeia, as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) \doteq \int_0^{x^2} \cos(t^2)dt$ e $g(x) \doteq \int_0^x e^{-t^2}dt$ são ambas deriváveis, tem limite igual a zero para $x \to 0$ e suas derivadas são dadas por $f'(x) = 2x\cos(x^4)$ e $g'(x) = e^{-x^2}$, donde $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$. Portanto, pela regra de l'Hôpital, conclui-se que o limite pedido existe e é igual a zero.

Questão **3.** (3 ptos.) *Calcule as seguintes integrais indefinidas:*

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4x}}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$.

Resposta:

(a) $2\ln|\sqrt{x^2-4x}+x-2|+\sqrt{x^2-4x}+k$, notando que $x^2-4x=(x-2)^2-2^2$ e pondo $x-2=2\sec u$, $u\in(0,\pi/2)$.

(b) $2(\operatorname{sen}\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x})+k$, pondo $u=\sqrt{x}$, $x>0$, e integrando-se por partes.

Questão **4.** (2 ptos.) *Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox da região do plano cartesiano limitada pelas curvas $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ e $y=\frac{1}{8x}$.*

Resposta: O volume é dado por $\pi\Big(\displaystyle\int_{1/4}^{1/2}[x-\frac{1}{64x^2}]\,\mathrm{d}x+\int_{1/2}^{1}[x-x^4]\,\mathrm{d}x\Big)=\frac{39\pi}{160}$, tendo sido a integral calculada pelo TFC.