

MAT111 - Cálculo Diferencial e Integral I
P3 - 26 de setembro de 2014
Professor: Gláucio Terra

Nome:_____	Nota:_____
No. USP:_____RG:_____	
Assinatura:_____	

Justifique todas as suas respostas. As questões podem ser resolvidas a lápis e em qualquer ordem. Boa prova!

QUESTÃO 1. (3 ptos.) *Calcule:*

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$

(b) $\int \arcsin x \, dx$

RESPOSTA:

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}} = \ln|\sqrt{5-2x+x^2} + x - 1| + k$. Basta observar que $5-2x+x^2 = (x-1)^2 + 2^2$ e fazer a mudança de variáveis $x-1 = 2 \operatorname{tg} u$, $u \in (-\pi/2, \pi/2)$.

(b) $\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + k$, integrando-se por partes (com $u = \arcsin x$ e $dv = dx$) e a seguir por substituição.

QUESTÃO 2. (2 ptos.) *Dados $a, b > 0$, calcule a área da região do plano cartesiano limitada pela elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

RESPOSTA:

Pelo teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann, tomando $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = a \sin t$, tem-se:

$$\begin{aligned} 2 \int_{-a}^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \, dx &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{1 - \frac{g(t)^2}{a^2}} g'(t) \, dt = \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ab \cos^2 t \, dt = \\ &= 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t) \right) dt \\ &= 2ab \left[\frac{t}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + ab \left[\frac{\sin(2t)}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

QUESTÃO 3. (2,5 ptos.) Calcule o volume de uma calota esférica de altura h ($h \leq a$) de uma esfera de raio a .

RESPOSTA: Seja D o disco de raio a centrado no ponto $(0, a)$ de $\mathbb{R}^2$. Rotacionando-se $\{(x, y) \in D \mid 0 \leq y \leq h\}$ em torno do eixo Oy obtém-se uma calota de altura h , cujo volume é dado por $\int_0^h \pi r(y)^2 dy$, onde $r(y) = \sqrt{a^2 - (a - y)^2}$. Ou seja, aplicando-se o TFC, o volume pedido é $\pi \int_0^h (2ay - y^2) dy = \pi [ay^2 - y^3/3]_0^h = \pi(a - h/3)h^2$.

QUESTÃO 4. (2,5 ptos.) Sejam $L > 0$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica de período $2L$ (i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 2L) = f(x)$). Seja $n \in \mathbb{Z}$. Prove que, $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

RESPOSTA:

Considere $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(t) = \int_t^{t+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$; ϕ está bem definida porque o integrando é uma função contínua, portanto Riemann-integrável em todo intervalo compacto. Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva do referido integrando (a qual existe, pelo 2o. TFC); então, pelo 1o. TFC, $\forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) = F(t + 2L) - F(t)$, o que mostra que ϕ é derivável e $\forall t \in \mathbb{R}, \phi'(t) = F'(t + 2L) - F'(t) = f(t + 2L) \cos \frac{n\pi(t+2L)}{L} - [f(t) \cos \frac{n\pi t}{L}] = 0$, pela periodicidade de f e do $\cos$. Então, por corolário do TVM, ϕ é constante, donde a tese.