Grupos Topológicos e aplicações à Medida de Haar

José Augusto Gerolin Gávea[1] e
Profa. Dra. Ofelia Teresa Alas (orientadora) [2]

[1] *Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME USP), Brasil - Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico*
gerolin@ime.usp.br;
[2] *Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME USP), Brasil*
alas@ime.usp.br;

1. Sobre o projeto

A teoria de grupos topológicos é provida de grande beleza pois representa uma junção entre a teoria algébrica de grupos - que está intimamente relacionada com a idéia de simetria - e a Topologia - a qual lida com o conceito de continuidade. Esse tipo de estrutura é amplamente utilizada em diversos ramos da Análise, como a Análise Harmônica, da Geometria, como na Geometria Integral, da Topologia Algébrica, em teorias da Física, como a Mecânica e Teoria de Campos, além de, é claro, dentro da própria Álgebra e Topologia Geral.

Neste trabalho pretendemos expor, em linhas gerais, parte do conteúdo trabalhado nesse projeto de pesquisa, o qual foi financiado pelo CNPq. As demonstrações dos resultados aqui expostos foram estudadas e detalhadas, sempre que necessário, com o intutito de serem publicadas sob forma de apostila, a fim de facilitar o estudo desse assunto por futuros estudantes. Uma versão preliminar está disponível em http://www.ime.usp.br/∼gerolin/

2. Introdução

Espaços com estruturas álgebrico-topológicas sempre possuíram papel central na pesquisa matemática. O exemplo clássico disso está no corpo dos números reais ou no grupo multiplicativo formado por sua parte positiva. Matemáticos como Kronecker, Cauchy, Bolzano, Weierstrass, Cantor e Dedekind demonstraram profundo interesse em estudar as diferenças entre as estruturas álgébricas e algébrico-topológicas de diversos conjuntos.

Somente com a definição mais abstrata de espaço topológico - com a qual trabalhamos atualmente - é que esses conceitos foram melhor entendidos, embora diversos resultados nessa direção já tinham sido estabelecidos vinte anos antes dela ter aparecido.

Entretanto, a definição de espaço topológico foi tão bem sucedida, deixando claras as diferenças conceituais e as aplicações dessas estruturas, que tornou-se um problema nada trivial dar uma boa definição relacionando conceitos algébricos, como o de grupo, com a estrutura de espaço topológico. Tanto é verdade, que a maior motivação para a definição de grupo topológico, na forma como conhecemos hoje, veio da Geometria, durante o estudo de grupos de transformações.

Por esse motivo, Sophus Lie, é considerado um dos precursores da teoria de Grupos Topológicos, quando estudou o que chamamos hoje de grupos de transformações analíticos finitos (que dependem de um número finito de parâmetros). Este são determinados por um sistema de transformações deriváveis a valores complexos:

$$x_i' = f_i(x_1, ..., x_n; a_1, ..., a_m)(i = 1, ..., n)$$

As motivações que, entre 1869 e 1871, conduziram Lie a examinar esses grupos são de caráter geométrico. O grande desenvolvimento da teoria dos grupos de transformações foi bastante motivado por Felix Klein, que em seu célebre "programa de *Erlangen*", propôs-se a estabelecer uma associação entre os grupos e as geometrias, sintetizando geometria como o estudo de propriedades do espaço que são invariantes sob um grupo de transformações.

Durante o ano de 1900, a teoria dos grupos topológicos ganhou fundamental importância no cenário da pesquisa matemática, quando Hilbert formulou o seu "quinto problema" relativo a grupos topológicos localmente euclidianos. Ele colocou a questão do quão problemático seria retirar a hipótese de diferenciabilidade dos Grupos Analíticos. Com a linguagem atual o problema pode ser formulado da seguinte maneira: sob que condições um grupo localmente euclidiano é um Grupo de Lie?

Nos poucos mais de cinqüenta anos da formulação do quinto problema, muito se desenvolveu na teoria de grupos topológicos. Uma das conjecturas formuladas durante esse período foi a existência de uma integral invariante sobre um grupo topológico. A existência de tal medida já era conhecida por Sophus Lie para o caso de grupos analíticos, o que motivou a invertigação de uma integral similar para grupos topológicos mais gerais. Hoje já conhecemos a Integral de Haar para grupos localmente compactos.

Em 1934, Pontrjagin publicou[1] seus primeiros resultados sobre a estrutura de grupos topológicos abe-

[1] Pontryjagin, L. Sur les groupes abéliens continus, C. R. Acad. Sci. Paris, 198, 328-330 (1934)

lianos e em 1938, o primeiro livro[2] a respeito da teoria de grupos topológicos, deixando claro que para a investigação de numerosos problemas, não era necessário considerar os grupos de transformações, mas apenas estudar a estrutura intrínseca do grupos munidos de uma topologia que tornassem contínuas as operações fundamentais de grupo.

3. Grupos Topológicos

Definição 1 (Grupo Topológico)**.** *Um Grupo Topológico é uma trinca $(G, \bullet, \tau)$, onde $(G, \bullet)$ é um grupo algébrico e (G, τ) um espaço topológico, no qual as operações:*

(i) $(x, y) \in G \times G \longmapsto x \bullet y \in G$

(ii) $x \in G \longmapsto x^{-1} \in G$

são contínuas.

Dado um grupo topológico G, é razoável esperar que um subgrupo algébrico $H \subset G$ - indicaremos por $H \ll G$ - também seja um grupo topológico, como um subespaço topológico de G. De fato, basta restringir a H as operações (i) e (ii), e teremos que H é um grupo topológico, munido com a topologia de subespaço.

Proposição 1. *Sejam G um grupo topológico e $H \ll G$, então $\overline{H}$ é um subgrupo topológico.*

A pergunta natural que surge é que se H é subgrupo abeliano de um grupo topológico G, então $\overline{H}$ também o é? Note que se $x, y \in \overline{H}$ e se xy é diferente de yx, então temos dois pontos distintos em G. Nesse momento, ficamos tentados a perguntar se existem abertos disjuntos que os separam. Mais precisamente, podemos nos perguntar se um grupo topológico é Hausdorff, ou pelo menos T_1.

Consideremos um grupo topológico Hausdorff. Suponhamos, por absurdo, que a aderência de H não seja abeliana. Então, existem vizinhanças U de xy e V de yx, tais que $U \bigcap V = \varnothing$. Como $x, y \in \overline{H}$, existem vizinhanças W_x e W_y, de x e y, respectivamente, tais que, para todo $z \in W_x$ e $t \in W_y$, $zt \in U$ e $tz \in V$. Entretanto, se $v, w \in H$ então $wv = vw$, e portanto, $wv \in U \bigcap V$, contradição.

Mostraremos posteriormente que basta que um grupo seja T_0 para que ele satisfaça aos axiomas $T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$. Veremos mais adiante, que um grupo topológico não é necessariamente normal.

[2] Pontrjagin, Topologische Gruppen.

3.1 Homogeneidade de Grupos

Proposição 2. *Sejam G um grupo topológico e $a \in G$. A aplicação $L_a : x \in G \longmapsto ax \in G$ é um homeomorfismo.*

Análogamente, a aplicação $R_a : x \in G \longmapsto xa \in G$ é um homeomorfismo.

Proposição 3. *Seja G um grupo topológico. A aplicação $I_v : x \longmapsto x^{-1}$ é um homeomorfismo.*

3.2 Bases e Vizinhanças da Identidade

Uma das propriedades mais interessantes da estrutura de grupo topológico está no fato de propriedades topológicas locais definirem as características do espaço, por translação. Foi em função disso que tratamos de demonstrar algumas propriedades das funções L_a, R_a e I_v. Desse modo, se um grupo topológico possui um sistema fundamental de vizinhanças para o elemento neutro **e**, por exemplo, compacta, então todo o grupo topológico será localmente compacto (cada ponto possuirá um sistema fundamental de vizinhanças compactas).

Proposição 4. *Sejam G um grupo topológico e β uma base de abertos para a identidade, $e \in G$. Então as famílias $\{Ux : x \in G\}$ e $\{xU : x \in G\}$ formam uma base de abertos para G.*

Proposição 5. *Seja G um grupo topológico. Então existe uma vizinhança V de e, tal que $V = V^{-1}$, ou seja, simétrica.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança arbitrária de e. Tome $V = U \cap U^{-1}$. V é não-vazio, pois ao menos o elemento neutro pertence a intersecção. Então temos: $V^{-1} = (U \cap U^{-1})^{-1} = U^{-1} \cap (U^{-1})^{-1} = U^{-1} \cap U = U \cap U^{-1} = V$. V é vizinhança da identidade, e $V \subset U$. $\square$

Observe que pela demonstração anterior, dada uma vizinhança U da identidade, podemos sempre supor, sem perda de generalidade, que esta é simétrica, pois se assim não o for, realizamos argumentação análoga a apresentada acima e teremos uma vizinhança simétrica da identidade.

Teorema 1. *Sejam G um grupo topológico, $\mho$ uma base de abertos para e. Então*

(i) $\forall U \in \mho$, *existe um* $V \in \mho$ *tal que* $V^2 \subset U$;

(ii) $\forall U \in \mho$, *existe um* $V \in \mho$ *tal que* $V^{-1} \subset U$;

(iii) $\forall U \in \mho$, *existe um* $V \in \mho$ *tal que* $xV \subset U$, $\forall x \in G$;

(iv) $\forall U \in \mho$, *existe um* $V \in \mho$ *tal que* $xVx^{-1} \subset U$, $\forall x \in G$;

Inversamente, sejam G um grupo topológico e W uma família de subconjuntos de G com a propriedade da intersecção finita, para os quais (i), (ii), (iii), (iv) ocorrem. A família de subconjuntos $\{xU : U \in \mho \text{ e } x \in G\}$, *é uma subbase de abertos para a topologia. Com esta topologia, G é um grupo topológico.*

3.3 Axiomas de Separação

Quando no início da primeira seção nós perguntamos se a aderência de um grupo topológico também era um grupo topológico, fomos induzidos a nos questionar sobre quais os Axiomas de Separação são satisfeitos por um grupo topológico em geral. Na demonstração que expusemos, a hipótese do espaço ser de Hausdorff foi fundamental. A próxima proposição nos mostra que é preciso bem menos que Hausdoff para concluir o mesmo resultado, ou mais precisamente, é preciso muito pouco para que um grupo topológico satisfaça ao axioma T_2.

Proposição 6. *Para um grupo topológico G, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *G é um espaço* T_0

(ii) *G é um espaço* T_1

(iii) *G é um espaço* T_2

(iv) $\bigcap U = \{e\}$, *onde U é um sistema fundamental de vizinhanças da identidade.*

Demonstrar que um grupo topológico é completamente regular está longe de ser uma tarefa trivial, como é para os outros axiomas de separação. Este resultado foi obtido por Pontrjagin. A técnica para sua demonstração se baseia na construção de um conjunto especial de vizinhanças da identidade, que satisfazem as seguintes propriedades:

(i) $V_{\frac{1}{2^n}} V_{\frac{m}{2^n}} \subset V_{\frac{m+1}{2^n}}; m \leq 2^n - 1\ ,\ m, n \in \mathbb{N}$

(ii) $V_r \subset V'_r; r < r' \leq 1., r, r' \in \mathbb{Q}$

A construção dessas vizinhanças se assemelha com o tipo de raciocínio empregado no Lema de Urysohn para espaços topológicos T_4. Esse mesmo conjunto de vizinhanças é utilizado para demonstrar que todo grupo topológico, no qual o elemento neutro possui uma base enumerável, é metrizável. Para todos os detalhes sugerimos ao leitor [1].

3.4 Grupos Quocientes

Considere (G,τ) um grupo topológico e H um subgrupo de G (estamos explicitando a topologia do grupo para não haver confusão no que segue). O quociente G/H denota o conjunto de todos as classe laterais $\{xH : x \in G\}$. Sabemos que este é um grupo com a operação xHyH = xyH. Gostariamos de colocar uma topologia neste espaço, que tenha propriedades boas (gostariamos que tivesse propriedades semelhantes ao próprio G), mas que ao mesmo tempo torne o grupo G/H um grupo topológico.

Sabemos que G é um grupo topológico, então a forma mais fácil de se obter uma topologia para o quociente é "herdar" a topologia de G. Mais precisamente, considere a aplicação canônica $\pi : G \longrightarrow G/H$, que associa a cada elemento de G a sua classe de equivalência. Vamos definir uma topologia em G/H da seguinte maneira:

$$\tau_{G/H} = \{Y \subset G/H : \pi^{-1}(Y) \in \tau\}$$

Ou seja, um aberto de G/H é a imagem direta dos abertos de G pela aplicação canônica do grupo. Chamamos essa topologia de **topologia quociente**. Note que com essa definição "ganhamos" a continuidade da aplicação canônica, algo que será fundamental para os resultados dessa seção.

Proposição 7. *Seja G um grupo topológico e H um subgrupo de G. Seja* G/H *o espaço quociente, munido com a topologia quociente, e* π *a aplicação canônica. Então:*

(i) π *é sobrejetora*

(ii) π *é contínua*

(iii) π *é aberta*

(iv) *A topologia quociente é a topologia mais fina para a qual* π *é contínua.*

Observe que com a definição dada acima e ou a proposição anterior, o grupo quociente terá propriedades análogas ao grupo G, já que propriedades como compacidade e conexidade são preservadas por funções contínuas. Não vamos detalhar resultados envolvendo compacidade e conexidade em grupos topológicos, pois gostaríamos de dedicar um espaço para o desenvolvimento da Medida de Haar.

3.5 Alguns Grupos Especiais

Daremos a seguir uma lista de exemplos de grupos topológicos. Para demonstrações das afirmações a seguir e para outros exemplos consultar [1]. Também nos capítulos seguintes outros grupos topológicos serão apresentados, como por exemplo, alguns grupos de transformações

(i) $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ ambos munidos com a topologia habitual são Grupos Topológicos. Do mesmo modo, R^n munido com a topologia habitual e a operação de adição.

(ii) O Toro $[0,1]^2 \diagup \mathbb{Z}^2$, ou mais geralmente, o Toro n-dimensional $[0,1]^n \diagup \mathbb{Z}^n$, munido com a topologia quociente.

(iii) A esfera n-dimensional $S^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$.

(iv) O Grupo $GL(n, \mathbb{R})$ das matrizes inversíveis e todos os seus subgrupos como, por exemplo, o grupo ortogonal $O(n, \mathbb{R})$, $SO(n, \mathbb{R})$ e $U(n, \mathbb{R})$, são grupos topológicos munidos com a topologia induzida do R^n.

(v) Todo grupo algébrico munido com a topologia discreta é um grupo topológico, pois esta topologia torna todas as funções contínuas.

4. Grupos Localmente Compactos

Definição 2. *Dizemos que um Grupo Topológico G é localmente compacto se este possui um sistema fundamental de vizinhanças compactas para o elemento neutro $e \in G$.*

4.1 Continuidade Uniforme

Definição 3. *Sejam G um grupo topológico e $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, dizemos que uma vizinhança V da identidade é uma vizinhança ϵ-uniformidade à esquerda, se*

$$x^{-1}y \in V \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

Analogamente definimos vizinhança ϵ-uniformidade à direita.

Uma vizinhança é ϵ-uniformidade se for ϵ-uniformidade à esquerda e ϵ-uniformidade à direita.

Definição 4. *Considere G um grupo topológico. Dizemos que uma função $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, quando dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança ϵ-uniformidade para f.*

Proposição 8. *Toda função real contínua de suporte compacto definida em um grupo localmente compacto G é uniformemente contínua.*

4.2 Grupos Localmente Euclidianos

Definição 5. *Um Espaço Topológico X é dito localmente euclidiano se existe um (único) inteiro positivo n tal que para todo $x \in X$ existe uma vizinhança aberta U homeomorfa a um subconjunto aberto do R^n.*

A definição mais geral de espaços localmente euclianos permite a existência de vizinhanças U e V de pontos $x, y \in X$ homeomorfas a $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente, com $m \neq n$. Lembramos também que com métodos de topologia algébrica pode-se demostrar que dois abertos U,V de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, não-vazios, $(m \neq n)$, respectivamente, não são homeomorfos. Para os nossos propósitos, vamos considerar sempre que todos as vizinhanças de pontos do espaço X são homeomorfas ao $\mathbb{R}^n$ para o mesmo n.

Proposição 9. *$M_n(\mathbb{C})$ e $G_n(\mathbb{C})$ são espaços localmente euclidianos. Além do mais, Se $H \ll G_n(\mathbb{C})$ então H é localmente euclidiano.*

4.3 Grupos de Lie

Definição 6. *(a) Seja f uma função à valores reais definidas em um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que f é de classe C^∞ se esta função admite derivadas parciais mistas de todas as ordens e se estas são contínuas em Ω.*

(b) Seja X um espaço topológico. Dizemos que um conjunto $\boldsymbol{A}$ é um atlas de classe C^∞ em X se os elementos de $\boldsymbol{A}$ são pares (U_α, ψ_α), $\alpha \in \Lambda$, Λ conjunto de índices, satisfazendo as seguintes condições:

(i) Cada U_α é um subconjunto aberto de X, e $X \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$

(ii) Cada ψ_α é um homeomorfismo de U_α em um subconjunto aberto $\psi_\alpha[U_\alpha] \subset R^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$ fixado.

(iii) Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ então $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta[U_\alpha \cap U_\beta] \longrightarrow \psi_\alpha[U_\alpha \cap U_\beta]$ é de classe C^∞.

(iv) Seja (U, ψ) um par consistindo em um subconjunto aberto U de X e um homeomorfismo $\psi : U \longrightarrow \psi[U]$. Se para cada par $(U_\alpha, \psi_\alpha) \in \boldsymbol{A}$ no qual $U_\alpha \cap U \neq \emptyset$, a aplicação $\psi_\alpha \circ \psi^{-1} : \psi[U_\alpha \cap U] \longrightarrow \psi_\alpha[U_\alpha \cap U]$ é de classe C^∞.

(c) Sejam X um espaço topológico Hausdorff e $\boldsymbol{A}$ um atlas de classe C^∞. Dizemos que o par $(X, \boldsymbol{A})$, é uma variedade n-dimensional C^∞, ou simplesmente, uma variedade. Os elementos do atlas são chamados de ***sistemas de coordenadas*** *da variedade.*

Definição 7 (Grupo de Lie)**.** *Uma variedade G, que é também um grupo topológico, é chamada Grupo de Lie se as aplicações*

(i) $(x, y) \in G \times G \longmapsto x \bullet y \in G$

(ii) $x \in G \longmapsto x^{-1} \in G$

são C^∞.

Proposição 10. *Toda variedade é localmente Euclidiana e, portanto, localmente compacta.*

E a recíproca desse problema? Quando um espaço localmente Euclidiano torna-se uma variedade? Para grupos topológicos esse problema foi modificado e transformado no quinto problema de Hilbert. Embora não tenhamos trabalhado na direção desse resultado, entendemos que é importante colocá-lo nessas linhas por se tratar de um problema com grande importância histórica. Esse problema foi resolvido em 1952, por Gleason, Montgomery e Zippin, afirmando que todo grupo localmente euclidiano é um Grupo de Lie.

4.4 Grupos Topológicos de Transformações

Considere X,Y dois espaços topológicos. Denotaremos por $C(X, Y)$ o conjuntos de todas as funções contínuas de X em Y. Considere F um subconjunto de $C(X, Y)$, K um subconjunto compacto de X e seja Ω um subconjunto aberto de Y. Defina

$$W(K, \Omega) = \{f \in F | f(K) \subset \Omega\}$$

Os subconjuntos da forma $W(K, \Omega)$ formam uma base de abertos para o conjunto F. Chamamos a topologia gerada por essa base de abertos de topologia **compacta-aberta** em F.

Lema 1. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos e* $F \subset C(Y, Z)$*. Para uma função* $f : X \longrightarrow F$*, definimos uma aplicação* $f' : X \times Y \longrightarrow Z$ *por*

$$f'(x, y) = f(x)(y)$$

Neste caso, se f' *é contínua então* f *é contínua. Além disso, a recíproca é verdadeira se supusermos Y um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff.*

Considere X um espaço topológico. Denotaremos por Homeo(X) o conjunto formado por todos os homeomorfismos de X nele mesmo. Sabemos que Homeo(X) é um grupo munido da operação de composição de funções. Como $Homeo(X) \subset C(X, X)$ nós vamos considerá-lo um espaço topológico munido com a topologia induzida por $C(X, X)$.

Lema 2. *Se X é um espaço topológico compacto e Hausdorff, então Homeo(X) é um grupo topológico. Assim todo subgrupo de Homeo(X) é também um grupo topológico.*

Definição 8 (Grupo Topológico de Transformações)**.** *Um grupo topológico de transformação é uma tripla* (G, X, φ)*, onde G é um grupo topológico, X é um espaço topológico e* $\varphi : G \times X \longrightarrow X$ *é uma aplicação contínua satisfazendo:*

(i) $\varphi(e, x) = x$, $\forall x \in X$*, onde e é a identidade de G.*

(ii) $\varphi(g_2, \phi(g_1, x)) = \varphi(g_2 g_1, x)$, $\forall g_1, g_2 \in G$ *e* $x \in X$.

Lema 3. *Seja* (X, G, φ) *um grupo topológico de tranformação. Dado* $g \in G$ *seja* $\varphi_g : X \longrightarrow X$ *uma função definida por* $\varphi_g(x) = \varphi(g, x)$*. Então* φ_g *é um homeomorfismo de X.*

Pelo Lema anterior, a função: $\phi : g \in G \longmapsto \phi_g \in Homeo(X)$ está bem definida. Além disso, ϕ é um homomorfismo de grupo.

Lema 4. *Seja* (X, G, φ) *um grupo topológico de tranformação. Dado* $g \in G$ *seja* $\varphi_g : X \longrightarrow X$ *uma função definida por* $\varphi_g(x) = \varphi(g, x)$*. Então* φ_g *é um homeomorfismo de X..*

Um corolário da primeira proposição desta seção, pode ser enunciado no seguinte resultado:

Proposição 11. *Sejam X um espaço topológico e as funções* ϕ *e* φ *conforme definidas anteiormente. Se* φ *é contínua então o mesmo ocorre com* ϕ*. Se X é um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff, então* φ *é contínua se, e somente, se* ϕ *é contínua.*

Proposição 12. *Seja X um espaço topológico compacto e Hausdorff. Então Homeo(X) é um grupo topológico, e considerar uma G-ação contínua* φ *em X é equivalente a considerar um homomorfismo* $\phi : G \longrightarrow Homeo(X)$ *de grupos topológicos.*

5. A Medida de Haar

Daremos alguns definições e resultados relativos a uma medida abstrata, para um melhor entendimento do que vem a seguir.

Definição 9. *Dado uma classe de conjuntos X, um σ-anel é um conjunto não-vazio tal que:*

(a) $A \in X$ *e* $B \in X \Longrightarrow A \setminus B \in X$

(b) $A_i \in X$, $i \in \mathbb{N} \Longrightarrow \cap_{i=1}^{\infty} A_i \in X$

Proposição 13. *Dado uma classe de conjuntos X, existe um único σ-anel R_0 tal que $X \subset R_0$ e tal que se R é um outro σ-anel contendo X então $R_0 \subset R$.*

O σ-anel R_0 é chamado de σ-anel gerado por X, e será denotado por $R(E)$.

Uma medida μ é uma função, definida num σ-anel,tomando valores na reta extendida, que é não negativa, enumeravelmente aditiva.

5.1 Motivação

A idéia da demonstração da existência de uma medida invariante em um grupo não é muito difícil. Tentaremos expô-la em linhas gerais, nos próximos parágrafos.

Consideremos, para fixar idéias, o grupo dos números reais aditivos (sabemos que é um grupo topológico localmente compacto). Gostariamos de definir uma "medida" nesse grupo, a qual assim como a medida de Lebesgue, tenha propriedades "razoáveis". Mais precisamente: queremos investigar a existência de uma função $m : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, onde $\mathcal{B}$ é σ-anel gerado pelos subconjuntos compactos que, para subconjuntos X,Y da reta, os quais chamaremos de mensuráveis, valham as seguintes propriedades:

(i) $0 \leqslant m(X) \leqslant \infty$ se $X \subset \mathbb{R}$ for mensurável.

(ii) $m(\cup X_i) = \sum m(X_i)$ para toda família X_i enumerável de partes mensuráveis, dois a dois disjuntos.

(iii) $m(y+X) = m(X), \forall y \in R$, onde X é mensurável e y + X também deverá ser.

A última propriedade é chamada de invariância da medida por translações. É razoável também esperar que os subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ estejam entre os conjuntos que iremos medir.

Suponhamos que tal medida exista. Considere dois subconjuntos da reta real X e Y, sendo que é possível cobrir X por um número finito de translações de Y: $X \subset (z_1 + Y) \cup ... \cup (z_n + Y)$. Desse modo:

$$m(X) \leq \sum_{i=1}^{n} m(z_i + Y) = n.m(Y)$$

Suponha que $0 < m(Y) < \infty$. Desse modo, podemos escrever $n \geq \frac{m(X)}{m(Y)}$. Definamos (X:Y) como sendo o menor dos inteiros n satisfazendo a desigualdade anterior.

Note que se X é compacto e o interior de Y é não-vazio, então é possível cobrí-lo com um número finito de translações. Informalmente, o número (X:Y) é a medida grosseira de quantas vezes X é maior do que Y. Evidentemente, essa comparação é melhor quanto menor for o tamanho de Y, e reciprocamente, é pior quando o tamanho de Y se aproxima do tamanho de X.

Em face desse problema, definamos uma unidade de medida, ou seja, fixemos $O \subset R$ tal que $m(O) = 1$. Suponhamos que O é compacto e que possua interior não-vazio - hipóteses perfeitamente razoáveis dado que queremos usar esse conjunto como unidade de medida natural para $\mathbb{R}$.

A fim de melhorar a nossa "medida", podemos considerar uma vizinhança V da origem e e definir uma "medida" como

$$m_V(X) = \frac{(X : V)}{(O : V)}$$

As idéias aqui expostas foram devidas a Haar. Entretanto, em seu trabalho, foi necessário lançar mão do método da "Diagonal de Cantor" e, por isso, Haar apenas conseguiu demonstrar a existência de um funcional para Grupos Topológicos Localmente compactos e **separáveis**.

Trataremos nos próximos parágrafos de transformar essas idéias em teoremas matemáticos. Veremos que o cerne das idéias de Haar ainda estão presentes, embora tenha sido necessários utilizar caminhos diferentes a fim de enfraquecer a hipótese de separabilidade.

5.2 Existência de um funcional Invariante (segundo André Weil)

Seja G um grupo topológico. Sejam $f, g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $g \geq 0, g \neq 0$. Consideremos todas as sequências finitas de números reais positivos $\{c_i\}$ e todos os conjuntos finitos $\{x_i\} \subset G$ tais que:

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i g(x_i^{-1}x) \ \forall x \in G$$

Definimos

$$(f : g) = \begin{cases} inf\{\sum_{i=1}^{n} c_i | f(x) \ \leq \ \sum_{i=1}^{n} c_i g(x_i^{-1}x)\} \\ \\ \infty \text{ caso não existam } \{c_i\} \text{ e } \{x_i\} \\ \text{ nas condições acima.} \end{cases}$$

Observe que se tivessemos uma "Integral de Haar" invariante à esquerda em G, concluiríamos que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \geqslant \frac{\int f dm}{\int g dm}$$

Proposição 14. *Seja G um grupo topológico e considere $f, g, h \in C_0^+(G)$ e seja $g \neq 0$. Então*

(i) $(f : g)$ *é finito;*

(ii) *para* $f \neq 0$, $(f : g) > 0$;

(iii) $(f_a : g) = (f : g)\ \forall a \in G$

(iv) $(cf : g) = c(f : g) \in \mathbb{R}, c > 0$

(v) $(f : g) \leqslant (h : g)$ *sempre que* $f \leqslant h$

(vi) $(f + g : h) \leqslant (f : h) + (g : h)$

(vii) $(f : h) \leqslant (f : g)(g : h)$

Definição 10. *Seja $f_0 \in C_0^+(G), f_0 \neq 0$, fixado. Defina*

$$I_g(f) = \frac{(f : g)}{(f_0 : g)}$$

Dessa forma, o número $I_g(f)$ nada mais é que uma medida relativa entre a medida de f e g e f_0 e g. Observe que $(f_0 : g)$ funciona como uma espécie de unidade da medida.

Proposição 15. *Sejam $f, g, f_1, f_2 \in C_0^+(G)$, com $g \neq 0$. Então*

(i) $I_g(f) \geq 0$

(ii) $I_g(f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0$

(iii) $I_g(f_a) = I_g(f)$

(iv) $I_g(cf) = cI_g(f), c \geq 0;$

(v) $I_g(f_1 + f_2) \leq I_g(f_1) + I_g(f_2)$

(vi) $\frac{1}{(f_0:f)} \leq I_g(f) \leq (f : f_0), f \neq 0$

(vii) $f_1 \leq f_2 \Rightarrow I_g(f_1) \leq I_g(f_2)$

O Lema seguinte é técnico e fundamental para a demonstração da existência do funcional segundo o raciocínio empregado por André Weil.

Proposição 16. *Sejam G um grupo topológico localmente compacto e $f_1, f_2 \in C_0^+(G)$. Dado $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança U de $e \in G$ tal que para todo $g \in C_0^+(G)$ tendo suporte em U*

$$I_g(f_1) + I_g(f_2) \leq I_g(f_1 + f_2) + \epsilon$$

Teorema 2 (Weil)**.** *Seja G um grupo topológico localmente compacto e Hausdorff. Então existe um funcional $I \in C_o^+(G)$, o qual é não trivial (não é identicamente nulo), não-negativo, invariante à esquerda, positivamente homogêneo e aditivo.*

Demonstração. Para cada $f \in C_o^+(G)$, defina $X_f = [\frac{1}{(f_0:f)}, (f : f_0)]$. Pelo Teorema de Tychonoff, $X = \prod_{f \in C_o^+(G)} X_f$ é um espaço compacto. Além disso, X é Hausdorff, pois cada X_f o é. Para cada g, não identicamente nulo, $I_g = (I_g(f))_{f \in C_o^+(G)} \in X$, já que $I_g(f) \in X_f$ pelo item (vi) da propósição 15.

Considere ϑ um sistema fundamental de vizinhanças para a identidade. Para cada vizinhança $V \in \vartheta$, defina

$$F_V = \overline{\{I_g \in X : \text{suporte de g está contido em } V\}}$$

Observe que os elementos da família $\{F_V | V \in \vartheta\}$ são subconjuntos fechados de X que tem a propriedade da intersecção finita. De fato, se $F_{V_1}, ..., F_{V_n}$ é uma família finita arbitrária, então $V = \cap_{i=1}^n V_i$ é uma vizinhança de $e \in G$ tal que, se g tem suporte contido em V, então $I_g \in \cap_{i=1}^n F_{V_i}$. Pela compacidade de X, temos que $\cap_{V \in \vartheta} F_V \neq \emptyset$. Tomemos I funcional tal que $I \in F_V\ \forall V \in \vartheta$. Denotemos por $I(f)$ a f-ésima coordenada de I, $I = (I(f))_{f \in C_o^+(G)}$. Vamos mostrar que I é, de fato, o funcional que procuramos.

Fixemos $\epsilon > 0$. Como $I \in F_V = \overline{\{I_g \in X : \text{suporte de g é} V\}}$ $\forall V \in \vartheta$, dado W aberto básico ao qual pertence, tem-se $W \cap F_V \neq \emptyset$.

$$\prod_{f \in C_o^+(G)} W_f = \begin{cases} W_f \text{ é aberto em } X_f \text{ para todo f num } J \subset C_o^+(G), \text{ finito} \\ \\ W_f = X_f \text{ para } f \in C_o^+(G) \diagdown J \end{cases}$$

Assim, para todo W aberto básico, existe um subconjunto finito $J_W \subset C_o^+(G)$ e $g \in C_o^+(G)$ tendo suporte contido em algum $V \in \vartheta$ tal que:

$$|I(f_i) - I_g(f_i)| < \epsilon,\ \forall f_i \in J_W$$

Para cada $J \doteq I_g$, pela proposição 15, tem-se que

(i) $J(f) \geq 0\ \forall f \in C_o^+(G)$

(ii) $J(f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0$

(iii) $J(f_a) = J(f)\ \forall f \in C_o^+(G)$

(iv) $J(cf) = cJ(f), c \geq 0\ \forall f \in C_o^+(G);$

(v) $J(f_1 + f_2) \leq J(f_1) + J(f_2)\ \forall f_1, f_2 \in C_o^+(G)$

Como a família $\{f_i\}$ e $\{g\}$ são arbitrárias, temos que as mesmas propriedades valem para $J = I$. Desse modo, temos que I é uma função à valores reais não-trivial, invariante à esquerda, não negativa, positivamente homogênea e sub-aditiva. Resta-nos apenas mostrar que a desigualdade reversa vale em (v)

Em função de 16, temos para $f_1, f_2 \in C_o^+(G)$ arbitrários

$$|I(f_1 + f_2) - I_g(f_1 + f_2)| < \epsilon$$

Pela proposição 16

$$I_g(f_1) + I_g(f_2) < I_g(f_1 + f_2) + \epsilon$$

Assim

$$I_g(f_1) + I_g(f_2) < I_g(f_1 + f_2) + \epsilon < I(f_1 + f_2) + 2\epsilon$$

$$I(f_1) + I(f_2) < I_g(f_1 + f_2) + 2\epsilon$$

Como ϵ é arbitrário, segue-se o resultado. Portanto, I é aditivo. □

A demonstração de Weil não informa nada a respeito da unicidade de tal funcional, sendo necessário estabelecer um resultado paralelo. Como veremos adiante, o raciocínio empregado na demonstração da existência do funcional como acima, segundo Cartan, torna natural o resultado da unicidade da medida a menos de uma constante positiva.

Teorema 3. *Seja G um grupo topológico localmente compacto e Hausdorff. Então o funcional I, determinado no teorema anterior, é único a menos de uma constante. Mais precisamente, se J é um outro funcional em $C_o^+(G)$ não-trivial, não-negativo, positivamente homogêneo, invariante à esquerda e aditivo, então existe uma constante $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ tal que:*

$$J(f) = cI(f) \ , \forall f \in C_0^+(G)$$

Finalmente, a partir do funcional I obtido anteriormente, podemos definir "a Medida de Haar":

Definição 11. *O funcional linear I é chamado de Integral de Haar. A medida de Haar está definida no σ-anel gerado pelo ssubconjuntos compactos e para cada subconjunto compacto A de G definimos:*

$$\mu(A) = \inf\{I(f)|f \leq 1 \ em \ , f \in C_0^+(G)\}$$

5.3 Existência e Unicidade da Integral de Haar segundo H. Cartan

A demonstração de André Weil tem o mérito de ser curta e de resgatar a idéia original de Haar. Entretanto, convém observar que nela faz-se uso do Axioma da Escolha por meio do Teorema de Tychonoff. Além disso, o raciocínio empregado na demonstração da existência do requerido funcional não nos dá nenhuma idéia a respeito de sua unicidade. Acreditava-se na época que, tendo em vista que este funcional é único a menos de uma constante positiva, não era necessário utilizar-se do Axioma da Escolha para obter tal funcional.

Muitos outros matemáticos trabalharam nessa direção. Um resultado bem sucedido foi devido a Henri Cartan e será apresentado a seguir. Convidamos o leitor a observar que há diferenças enormes entre esse resultado com as primeiras idéias de Haar.

Lema 5. *Considere G um grupo topológico e $f_i \in C_o^+(G), 1 \leq i \leq n$. Sejam $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ números reais fixados. Então existe uma vizinhança U da identidade $e \in G$ tal que para todo $g \in C_o^+(G)$ com suporte em U:*

$$I_g(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i I_g(f_i) \leq I_g(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i) + \epsilon$$

para todo $0 \leq \lambda_i \leq \delta$.

Teorema 4 (Aproximação)**.** *Considere G um grupo topológico e $f \in C_o^+(G)$. Sejam $\epsilon > 0$ e V uma vizinhança da identidade $e \in G$ tal que $(y^{-1}x \in V \longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon \ \forall x, y \in G)$. Fixe $h \in C_o^+(G)$, $h \neq 0$, tal que $h[G \setminus V] = 0$. Então para cada $\epsilon' > \epsilon$ podemos obter uma família $\{s_i\} \subset G$ e números reais $c_i > 0$ ta que para todo $x \in G$:*

$$|f(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i h(s_i^{-1}x)| < \epsilon'$$

Referências

[1] J.A. Gerolin, *Grupos Topológicos e aplicações*, disponível em http://www.ime.usp.br/~gerolin/, 2007 (em desenvolvimento).

[2] D. Montgomery and L. Zippin, *Topological transformation groups*, Interscience Publishers, 1955.

[3] L. Pontrjagin, *Topological groups*, Russian monographs and texts on advanced mathematics and physics, 1966.

[4] T. Hussain, *Introduction to Topological Groups*, W.B. Saunders Company, 1966.

[5] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, 1989.

[6] P. Halmos, *Measure Theory*, Springer, 2000.

[7] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann (reedição).

[8] J. Pier, *L'apparition de la théorie des groupes topologiques*, Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, Paris, 1988.