MAT 2219 - Cálculo III para Química

Semestre 2016-II / Exercícios (Lista 6)

Prof. Gerard J. A.M.

Exercício 1 *Calcule o fluxo* $\iint_S \langle \mathrm{rot} F, N\rangle dS$, *onde*

(1) $F(x,y,z) = (y^2, xy, xz)$, *S é o hemisferio* $x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0$ *e N é a normal unitária exterior a S.*

(2) $F(x,y,z) = (y,z,x)$, *S é a parte do paraboloide* $z = 1-x^2-y^2$, *com* $z \geq 0$ *e N é a normal unitária exterior a S.*

(3) $F(x,y,z) = (y-z, yz, -xz)$, *$S$ está formada pelas cinco faces do cubo* $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$, *não localizadas no plano* (x,y) *e N é a normal unitária exterior a S.*

(4) $F(x,y,z) = (xz, -y, x^2y)$, *$S$ está formada das três faces não localizadas no plano* (x,z) *do tetraedro limitado pelos três planos coordenados e o plano* $3x+y+3z=6$, *e N é a normal unitária exterior a S.*

Exercício 2 *Calcule as seguintes integrais de linha*

(1) $\int_\gamma ydx + zdy + xdz$, *onde γ é a curva de interseção do plano* $x+y+z=0$ *e a esfera* $x^2+y^2+z^2=r^2$.

(2) $\int_\gamma (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, *onde γ é a curva de interseção do cilindro* $x^2+y^2=2y$ *e o plano* $y=z$.

(3) $\int_\gamma y^2dx + xydy + xzdz$, *onde γ é a curva de interseção do cilindro* $x^2+y^2=2y$ *e o plano* $y=z$.

(4) $\int_\gamma (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, *onde γ é a curva de interseção do cilindro* $x^2+y^2=a^2$ *e o plano* $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$, $a>0, b>0$.

(5) $\int_\gamma (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$, *onde* γ *é a curva de interseção do hemisferio* $x^2+y^2+z^2=2ax$, $z>0$ *e o cilindro* $x^2+y^2=2bx$, $0<b<a$.

(6) $\int_\gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$, *onde* γ *é a curva de interseção da superfície do cubo* $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$ *e o plano* $x+y+z=3a/2$.

Exercício 3 *Suponha que para o sólido* $V\subset\mathbb{R}^3$, *limitado pela superfície* S, *é válida a fórmula de Gauss-Ostrogradski (da divergência). Mostre que*

$$\iint_S \langle F\times\nabla\varphi, N\rangle dS = \iiint_V \langle \nabla\varphi, \mathrm{rot}F\rangle dxdydz$$

Exercício 4 *Calcule o fluxo* $\iint_S \langle F, N\rangle dS$, *onde*

(1) $F(x,y,z)=\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+(z-1)^2=2\}$,

(2) $F(x,y,z)=(1+2x,y,z)$, $S=\{(x,y,z)|x^2+y^2=z^2,\quad 0\le z\le 4\}$,

(3) $F(x,y,z)=(2x,-y,z)$, $S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=4,\quad 3z=x^2+y^2\}$,

(4) $F(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$, S *é a superfície do cubo* $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$ *e* N *a normal unitária exterior a* S,

(5) $F=\nabla\varphi$, S *é a esfera* $x^2+y^2+z^2=1$, *com normal unitária exterior* N *e* φ *é um campo escalar de classe* C^2 *com as propriedades* $|\nabla\varphi|^2=4\varphi$ *e* $\mathrm{div}(\varphi\nabla\varphi)=10\varphi$.