MAT 2219 - Cálculo III para Química

Semestre 2016-II / Exercícios (Lista 5)

Prof. Gerard J. A.M.

Exercício 1 *Calcule* $\int_\gamma y^2dx + xdy$, *onde*

(a) γ *é o quadrado de vértices* $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ *e* $(0,2)$,

(b) γ *é o quadrado de vértices* $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ *e* $(1,-1)$,

(c) γ *é o quadrado de vértices* $(2,0)$, $(-2,0)$, $(0,2)$ *e* $(0,-2)$,

(d) γ *é dada por* $x^2+y^2=4$,

(e) $\gamma(t) = (2\cos^3(t), 2\sin^3(t))$, $0 \le t \le 2\pi$

Exercício 2 *Calcule a área da região plana,*

(1) *limitada pelas curvas* $y=2$, $y=x^2+1$,

(2) *limitada pelas curvas* $y=0$, $x=1$ $2x+y=4$,

(3) *limitada pelas curvas* $x=t^2$, $y=t^3$, $x=1$ $y=0$,

(4) *limitada pela curva* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

(5) *limitada pela curva* $(\frac{x}{a})^{2/3}+(\frac{y}{a})^{2/3}=1$.

Exercício 3 *Calcule* $\int_\gamma Pdx + Qdy$, *onde* γ *é o quadrado* $|x| \le a$, $|y| \le a$, $P(x,y) = xe^{-y^2}$, $Q(x,y) = -x^2ye^{-y^2} + \frac{1}{x^2+y^2}$.

Exercício 4 *Considere dois campos escalares* u *e* v *de classe* C^1 *num conjunto aberto que contem o disco* D *com fronteira* $x^2+y^2=1$ *e defina os campos de vetores* F_1 *e* F_2 *como*

$$F_1(x,y) = (\mathrm{v}(x,y), \mathrm{u}(x,y)), \quad F_2(x,y) = \Big(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}, \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\Big).$$

Calcule $\iint_D \langle F_1, F_2\rangle dxdy$*, se na fronteira de* D *tem-se* $\mathrm{u}=1$ *e* $\mathrm{v}=y$*.*

Exercício 5 *Sejam* f *e* g *dois campos escalares de classe* C^2 *num conjunto aberto conexo* Ω *do plano. Mostre que*

(1) $\int_\gamma f\nabla g \cdot d\gamma = -\int_\gamma g\nabla f \cdot d\gamma$*, para toda curva fechada* γ *regular por partes contida em* Ω*.*

(2) $\int_\gamma f\frac{\partial g}{\partial \mathrm{n}}ds = \int_\gamma g\frac{\partial f}{\partial \mathrm{n}}ds$*, para toda curva fechada* γ *regular por partes contida em* Ω *tal que, na região limitada por* γ *tem-se* $\Delta f = 0, \Delta g = 0$*, onde* $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{n}} = \langle \nabla f, \mathrm{n}\rangle$*,* n *é a normal unitária à* γ *e* $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$*.*

(3) *Seja* $\gamma \subset \Omega$*, uma curva fechada regular por partes, e seja* $G \subset \Omega$ *a região limitada por* γ*, tais que,* $\Delta f(x,y) = 0$ *para cada* $(x,y) \in G$ *e* $f(x,y) = 0$ *para cada* $(x,y) \in \gamma$*. Mostre que* $f(x,y) = 0$ *para todo* $(x,y) \in G$*.*

Exercício 6 *Calcule* $\int_\gamma \langle F, \mathrm{n}\rangle ds$*, onde*

(1) $F(x,y) = (\frac{x}{(x^2+y^2)^5}, \frac{y}{(x^2+y^2)^5})$ *e* n *é a normal unitária exterior à curva* $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$*,* $0 \le t \le \pi$*.*

(2) $F(x,y) = (x^3y^3, 3y - \frac{3}{4}x^2y^4)$ *e* n *é a normal unitária exterior à curva* $\gamma(t) = (t^3, \sin(4\arctan(t^2)))$*,* $0 \le t \le 1$*.*

(3) $F(x,y) = (x^{10}, 3x - 10x^9y)$*,* γ *é uma curva regular por partes contida no primeiro quadrante com extremos nos pontos* $(1,0)$ *e* $(0,1)$*, e com normal unitária exterior* n*.*