MAT 2219 - Cálculo III para Química

Semestre 2016-II

Uma região do tipo I no retângulo $[0, \sqrt{2}\alpha] \times [0, \sqrt{2}\alpha]$, $\alpha > 0$

Prof. Gerard J. A.M.

14/09/2016

Exercício 1 *Usando coordenadas polares calcule a integral dupla*

$$I = \int_0^{\alpha} \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \Big) dx, \quad \alpha > 0$$

onde $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{n-3}{2}}$, $\phi_1(x) = \frac{x^n}{\alpha^{n-1}}$, $\phi_2(x) = \sqrt{2\alpha^2 - x^2}$ *e* $n \geq 2$ *é um número natural.*

Solução

A região de integração é dada por

$$R_{xy} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq \alpha, \frac{x^n}{\alpha^{n-1}} \leq y \leq \sqrt{2\alpha^2 - x^2}\},$$

e para calcular os pontos de interseção dos gráficos das funções $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$, consideremos a igualdade $\frac{x^n}{\alpha^{n-1}} = \sqrt{2\alpha^2 - x^2}$, a qual pode ser escrita como $x^{2n} + \alpha^{2(n-1)}x^2 - 2\alpha^{2n} = 0$, onde $p(x^2) = x^{2n} + \alpha^{2(n-1)}x^2 - 2\alpha^{2n}$ é um polinômio de grau n na variável x^2; assim as interseções procuradas são dadas pelas raizes de este polinômio, isto é, pelas soluções da equação $p(x^2) = 0$.

Para mostrar que $Y - A$ é um fator de $p(x^2)$, onde $Y = x^2$ e $A = \alpha^2$, podemos utilizar a divisão usual entre polinômios para obter

$$p(Y) = (Y - A)(q(Y) + 2A^{n-1}), \quad q(Y) = \sum_{k=1}^{n-1} Y^{n-k}A^{k-1},$$

de onde, $(Y - A) = (x - \alpha)(x + \alpha)$ determina as soluções $x = -\alpha$ e $x = \alpha$ para $p(x^2) = 0$; e como na região R_{xy} temos $0 \leq x \leq \alpha$, o ponto de interseção das curvas $(x, \phi_1(x))$ e $(x, \phi_2(x))$, é o ponto (α, α), pois de fato $\phi_1(\alpha) = \alpha$ e $\phi_2(\alpha) = \alpha$.

Como a curva dada por $y = x$, pasa pelo ponto (α, α), então pode escrever a região de integração como $R_{xy} = R^1_{xy} \cup R^2_{xy}$, onde

$$\begin{aligned} R^1_{xy} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq \alpha, \frac{x^n}{\alpha^{n-1}} \leq y \leq x\}, \\ R^2_{xy} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq \alpha, x \leq y \leq \sqrt{2\alpha^2 - x^2}\}, \end{aligned}$$

a reta $y = x$ determina a partição de R_{xy} em um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ no primeiro quadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Antes de aplicar a transformação de coordenadas polares $T(r, \theta) = (x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, a qual satisfaz $|\det DT(r, \theta)| = r > 0$, escrevamos I da seguinte forma

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\alpha \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \Big) dx \\ &= \int_0^\alpha \Big(\int_{\phi_1(x)}^{x} f(x, y) dy \Big) dx + \int_0^\alpha \Big(\int_{x}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \Big) dx \\ &= \iint_{R^1_{xy}} f(x, y) dx dy + \iint_{R^2_{xy}} f(x, y) dx dy = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Na primeira região R^1_{xy}, T será definida pelas desigualdades $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ e $\frac{r^n \cos^n(\theta)}{\alpha^{n-1}} \leq r\sin(\theta)$, isto é, obtemos o conjunto

$$R^1_{r\theta} = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 < r \leq \alpha \Big(\frac{\sin(\theta)}{\cos^n(\theta)} \Big)^{\frac{1}{n-1}} \right\}$$

tal que $T(R^1_{r\theta}) = R^1_{xy}$.

Anâlogamente, na segunda região R^2_{xy}, T será definida pelas desigualdades $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 < r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2\alpha^2} = \sqrt{2}\alpha$, e o conjunto

$$R^2_{r\theta} = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 | \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 < r \leq \sqrt{2}\alpha\}$$

é tal que $T(R^2_{r\theta}) = R^2_{xy}$.

Daqui, como $f(T(r,\theta)) = (r^2)^{\frac{n-3}{2}} = r^{n-3}$ e $|\det DT(r,\theta)| = r > 0$, resulta

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{R^1_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{R^1_{r\theta}} f(T(r,\theta))|\det DT(r,\theta)|drd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\int_0^{\alpha\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos^n(\theta)}\right)^{\frac{1}{n-1}}} r^{n-2}dr\Big)d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\alpha^{n-1}}{n-1}\Big(\frac{\sin(\theta)}{\cos^n(\theta)}\Big)d\theta = \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)^2}\Big(\big(\frac{1}{\cos(\pi/4)}\big)^{n-1} - 1\Big) \\
&= \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)^2}\Big((\sqrt{2})^{n-1} - 1\Big) = \frac{(\sqrt{2}\alpha)^{n-1}}{(n-1)^2}\Big(1 - \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{n-1}\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \iint_{R^2_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{R^2_{r\theta}} f(T(r,\theta))|\det DT(r,\theta)|drd\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\sqrt{2}\alpha} r^{n-2}dr\Big)d\theta = \frac{(\sqrt{2}\alpha)^{n-1}}{n-1}\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$I = I_1 + I_2 = \frac{(\sqrt{2}\alpha)^{n-1}}{(n-1)^2}\Big(1 - \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{n-1}\Big) + \frac{(\sqrt{2}\alpha)^{n-1}}{n-1}\frac{\pi}{4}$$

Debemos observar que para $n = 2$, a função $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-1/2}$ tem uma descontinuidade em $(x,y) = (0,0)$, mas $I = \sqrt{2}\alpha\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) + \sqrt{2}\alpha\frac{\pi}{4}$.

$\square$