MAT 2219 - Cálculo III para Química

Semestre 2016-II

Sobre a função $\frac{x-y}{(x+y)^3}$ e o quadrado $[0,1]\times[0,1]$

Prof. Gerard J. A.M.

19/08/2016

Exercício 1 *Aproxime a integral* $\iint_R \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy$, *onde* $R=[0,1]\times[0,1]$, *pelas seguintes somas finitas*

$$\begin{aligned} M_n &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\bar{x}_i-\bar{y}_j}{(\bar{x}_i+\bar{y}_j)^3}\Delta x_i\Delta y_j, \quad \textit{onde} \\ \Delta x_i &= x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}, \qquad \bar{x}_i = \frac{x_i+x_{i-1}}{2} \\ \Delta y_j &= y_j - y_{j-1} = \frac{1}{n}, \qquad \bar{y}_j = \frac{y_j+y_{j-1}}{2} \end{aligned}$$

e $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$, $0=y_0<y_1<\cdots<y_n=1$.

Solução

Note que das recurrências $x_i = x_{i-1}+\frac{1}{n}$ e $y_j=y_{j-1}+\frac{1}{n}$ obtemos

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1}+\frac{1}{n} = x_{i-2}+\frac{2}{n} = x_{i-3}+\frac{3}{n} = \cdots = x_0+\frac{i}{n} = \frac{i}{n} \\ y_j &= y_{j-1}+\frac{1}{n} = y_{j-2}+\frac{2}{n} = y_{j-3}+\frac{3}{n} = \cdots = y_0+\frac{j}{n} = \frac{j}{n} \end{aligned}$$

de onde,

$$
\begin{aligned}
\Delta x_i \Delta y_j &= \frac{1}{n^2} \\
\bar{x}_i &= \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1}) = \frac{1}{2}(\frac{i}{n} + \frac{i-1}{n}) = \frac{2i-1}{2n}, \\
\bar{y}_j &= \frac{1}{2}(y_j + y_{j-1}) = \frac{1}{2}(\frac{j}{n} + \frac{j-1}{n}) = \frac{2j-1}{2n}, \\
\bar{x}_i - \bar{y}_j &= \frac{2i-1}{2n} - \frac{2j-1}{2n} = \frac{i-j}{n}, \\
\bar{x}_i + \bar{y}_j &= \frac{2i-1}{2n} + \frac{2j-1}{2n} = \frac{i+j-1}{n}, \\
\frac{\bar{x}_i - \bar{y}_j}{(\bar{x}_i + \bar{y}_j)^3} &= \frac{\frac{i-j}{n}}{(\frac{i+j-1}{n})^3} = \Big(\frac{i-j}{(i+j-1)^3}\Big)n^2
\end{aligned}
$$

assim, a integral $\iint_R \frac{x-y}{(x+y)^3} dxdy$ pode ser aproximada pela soma

$$
\begin{aligned}
M_n &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\bar{x}_i - \bar{y}_j}{(\bar{x}_i + \bar{y}_j)^3}\Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{i-j}{(i+j-1)^3} n^2 \Delta x_i \Delta y_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{i-j}{(i+j-1)^3}
\end{aligned}
$$

Por exemplo, é facil ver que $M_1 = 0$; e quando $n = 2$ ou $n = 3$ obtemos

$$
\begin{aligned}
M_2 &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{i-j}{(i+j-1)^3} = \sum_{i=1}^{2}[\frac{i-1}{(i+1-1)^3} + \frac{i-2}{(i+2-1)^3}] \\
&= [\frac{1-1}{(1+1-1)^3} + \frac{1-2}{(1+2-1)^3}] + [\frac{2-1}{(2+1-1)^3} + \frac{2-2}{(2+2-1)^3}] \\
&= \frac{1-2}{(1+2-1)^3} + \frac{2-1}{(2+1-1)^3} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_3 &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{i-j}{(i+j-1)^3} = \sum_{i=1}^{3}[\frac{i-1}{(i+1-1)^3}+\frac{i-2}{(i+2-1)^3}+\frac{i-3}{(i+3-1)^3}] \\
&= [\frac{1-1}{(1+1-1)^3}+\frac{1-2}{(1+2-1)^3}+\frac{1-3}{(1+3-1)^3}]+ \\
&\quad +[\frac{2-1}{(2+1-1)^3}+\frac{2-2}{(2+2-1)^3}+\frac{2-3}{(2+3-1)^3}] \\
&\quad +[\frac{3-1}{(3+1-1)^3}+\frac{3-2}{(3+2-1)^3}+\frac{3-3}{(3+3-1)^3}] \\
&= \frac{1-2}{(1+2-1)^3}+\frac{1-3}{(1+3-1)^3}+\frac{2-1}{(2+1-1)^3}+\frac{2-3}{(2+3-1)^3}+ \\
&\quad +\frac{3-1}{(3+1-1)^3}+\frac{3-2}{(3+2-1)^3} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Para mostrar que $M_n = 0$ para todo $n \geq 1$, primeiro observamos que os números $a_{ij} = \frac{i-j}{(i+j-1)^3}$ satisfaz $a_{ii} = 0$ para todo $i = 1, \cdots, n$ e além disto

$$
a_{ij} = \frac{i-j}{(i+j-1)^3} = -\frac{j-i}{(j+i-1)^3} = -a_{ji} \quad \Longrightarrow \quad a_{ij} + a_{ji} = 0
$$

assim, M_n é dado por

$$
\begin{aligned}
M_n &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i-j}{(i+j-1)^3} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n}[a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}+\cdots+a_{i(n-1)}+a_{in}] \\
&= [a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{1(n-1)}+a_{1n}] \\
&= [a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{2(n-1)}+a_{2n}] \\
&= [a_{31}+a_{32}+a_{33}+\cdots+a_{3(n-1)}+a_{3n}] \\
&\vdots \\
&= [a_{(n-1)1}+a_{(n-1)2}+a_{(n-1)3}+\cdots+a_{(n-1)(n-1)}+a_{(n-1)n}] \\
&= [a_{n1}+a_{n2}+a_{n3}+\cdots+a_{n(n-1)}+a_{nn}]
\end{aligned}
$$

onde todos os somandos são elementos da matriz $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, aparecendo de fato as quantidades a_{ii} na diagonal desta matriz e as quantidades $a_{ij} + a_{ji}$

correspondendo as matrizes triangular superior e inferior associadas a esta matriz. Portanto $M_n = 0$ para todo $n \geq 1$.

$\square$

Exercício 2 *Estude a integral dupla* $\iint_R \frac{x-y}{(x+y)^3} dxdy$*, onde* $R = [0,1] \times [0,1]$.

SOLUÇÃO

Observemos que a função $f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$ claramente não está definida na reta $y = -x$, sendo ilimitada nesta reta $y = -x$, em particular, é ilimitada no ponto $(0,0) \in R$, onde ocorre uma descontinuidade para f. Além disto, f também satisfaz $f(x,x) = 0, x \neq 0$, $f(-x,-y) = f(x,y)$, $f(x,y) = -f(y,x)$.

Como ∂R é uma curva de conteudo zero, e sendo f contínua em $R \backslash \{(0,0)\}$ espera-se que f seja integrável sobre R; mas como f é ilimitada em $(0,0) \in \partial R$ não podemos esperar que sejam válidas as igualdades

$$\iint_R \frac{x-y}{(x+y)^3} dxdy = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \Big) dx = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \Big) dy.$$

Note que $y \mapsto f(x,y)$ está definida e contínua em todo $y \in [0,1]$ logo a integral $F(x) = \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy, x \in [0,1]$ existe e é dada por

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy = \int_0^1 \Big(\frac{x+y}{(x+y)^3} + \frac{-2y}{(x+y)^3} \Big) dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2} dy - 2 \int_0^1 \frac{y}{(x+y)^3} dy \\ &= F_1(x) - 2F_2(x), \end{aligned}$$

integrando por partes, a integral $F_2(x) = \int_0^1 \frac{y}{(x+y)^3} dy$ é dada por

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int_0^1 \frac{y}{(x+y)^3} dy = y\Big(-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+y)^2} \Big)\Big|_0^1 - \int_0^1 \Big(-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+y)^2} \Big) dy \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2} dy \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} F_1(x) \end{aligned}$$

assim, obtemos $F(x) = F_1(x) - 2F_2(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, que é uma função definida e continua para qualquer $x \in [0,1]$, então a integral $\int_0^1 F(x)dx$ existe e obtemos a integral iterada

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dy\Big)dx = \int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}dx = -\frac{1}{(x+1)}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Por outro lado, como a função $x \mapsto f(x,y)$ está definida e continua em todo $x \in [0,1]$, temos que a integral $G(y) = \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dx, y \in [0,1]$ existe e como $f(x,y) = -f(y,x)$ obtemos

$$G(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = -\int_0^1 f(y,x)dx = -F(y) = -\frac{1}{(y+1)^2}$$

assim, obtemos a outra integral iterada

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dx\Big)dy = \int_0^1 G(y)dy = -\int_0^1 \frac{1}{(y+1)^2}dy = \frac{1}{(y+1)}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}$$

Daqui, é claro que

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dx\Big)dy = -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dy\Big)dx,$$

e por tanto, embora existam cada uma destas integrais, não podemos ter a igualdade

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dx\Big)dy = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dy\Big)dx$$

$\square$

Exercício 3 *Calcule* $\iint_{R_\varepsilon} \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy$, *onde* $R_\varepsilon = [\varepsilon,1] \times [\varepsilon,1]$, $0 < \varepsilon < 1$.

SOLUÇÃO
Integrando de forma iterada

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_\varepsilon^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dy = \int_\varepsilon^1 \Big(\frac{x+y}{(x+y)^3} + \frac{-2y}{(x+y)^3}\Big)dy \\ &= \int_\varepsilon^1 \frac{1}{(x+y)^2}dy - 2\int_\varepsilon^1 \frac{y}{(x+y)^3}dy \\ &= F_1(x) - 2F_2(x), \end{aligned}$$

integrando por partes, a integral $F_2(x) = \int_\varepsilon^1 \frac{y}{(x+y)^3} dy$ é dada por

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int_\varepsilon^1 \frac{y}{(x+y)^3} dy = y\Big(-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+y)^2}\Big)\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \Big(-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+y)^2}\Big) dy \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{(x+\varepsilon)^2} + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{(x+y)^2} dy \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{(x+\varepsilon)^2} + \frac{1}{2}F_1(x) \end{aligned}$$

assim, $F(x) = F_1(x) - 2F_2(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{\varepsilon}{(x+\varepsilon)^2}$ é definida e contínua para todo $x \in [\varepsilon, 1]$; integrando resulta

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 F(x)dx &= \int_\varepsilon^1 \Big(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{\varepsilon}{(x+\varepsilon)^2}\Big) dx \\ &= \int_\varepsilon^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx - \varepsilon \int_\varepsilon^1 \frac{1}{(x+\varepsilon)^2} dx \\ &= \Big(-\frac{1}{(x+1)}\Big)\Big|_\varepsilon^1 - \varepsilon\Big(-\frac{1}{(x+\varepsilon)}\Big)\Big|_\varepsilon^1 \\ &= \Big(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\varepsilon+1}\Big) - \varepsilon\Big(-\frac{1}{\varepsilon+1} + \frac{1}{2\varepsilon}\Big) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\varepsilon+1} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} - \frac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

De forma anâloga

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_\varepsilon^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx = -\int_\varepsilon^1 \Big(\frac{x+y}{(x+y)^3} + \frac{-2x}{(x+y)^3}\Big) dx \\ &= -(\int_\varepsilon^1 \frac{1}{(x+y)^2} dx - 2\int_\varepsilon^1 \frac{x}{(x+y)^3} dx) \\ &= -(G_1(y) - 2G_2(y)), \end{aligned}$$

integrando por partes, a integral $G_2(y) = \int_\varepsilon^1 \frac{x}{(x+y)^3} dx$ é dada por

$$\begin{aligned} G_2(y) &= \int_\varepsilon^1 \frac{x}{(x+y)^3} dx = x\Big(-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+y)^2}\Big)\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \Big(-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+y)^2}\Big) dx \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{(y+\varepsilon)^2} + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{(x+y)^2} dx \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{(y+\varepsilon)^2} + \frac{1}{2}G_1(y) \end{aligned}$$

assim, $G(y) = -(G_1(y) - 2G_2(y)) = -(\frac{1}{(y+1)^2} - \frac{\varepsilon}{(y+\varepsilon)^2})$ é definida e contínua para todo $y \in [\varepsilon, 1]$; integrando obtemos

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 G(y)dy &= -\int_\varepsilon^1 \Big(\frac{1}{(y+1)^2} - \frac{\varepsilon}{(y+\varepsilon)^2}\Big)dy \\ &= -(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\varepsilon+1} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} - \frac{1}{2}) = -0 = 0\end{aligned}$$

O que podemos observar, comparando com exercício anterior, é que no retângulo $R_\varepsilon = [\varepsilon, 1] \times [\varepsilon, 1]$ a função $\frac{x-y}{(x+y)^3}$ é contínua e limitada, e sendo portanto integrável em R_ε, tem-se que

$$\begin{aligned}\iint_{R_\varepsilon} \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy &= \int_\varepsilon^1 \Big(\int_\varepsilon^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dy\Big)dx = \int_\varepsilon^1 \Big(\int_\varepsilon^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dx\Big)dy \\ &= 0.\end{aligned}$$

O valor desta integral independe de $0 < \varepsilon < 1$, fazendo $\varepsilon \to 0$ podemos conjecturar que no retângulo $R = [0, 1] \times [0, 1]$ temos

$$\iint_R \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{R_\varepsilon} \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy = 0.$$

$\square$