Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
41, 73–85 (1977)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Une classe de systèmes de particules stable par association

Françoise Bertein[1] et Antonio Galves[2*]

[1] Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Laboratoire de Probabilités
4 Place Jussieu – tour 56, F-75230 Paris Cedex 05, France
[2] Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 20570 S. Paulo, S.P., Brésil

Introduction

Nous allons étudier l'évolution de certains systèmes à une infinité de particules sur un espace dénombrable S. Il s'agit d'une classe de processus markoviens, ayant comme espace d'états l'ensemble $\mathscr{P}(S)$ des parties de S, et dont le générateur $\mathscr{L}$ appliqué à une fonction cylindrique f[1] quelconque s'écrit:

$$(0.0)\quad \mathscr{L} f=\sum_{\pi\in\Sigma}\lambda(\pi)(f\circ\pi-f)$$

où Σ est une classe convenable d'applications de $\mathscr{P}(S)$ dans $\mathscr{P}(S)$, et λ une application de Σ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant certaines conditions.

L'ensemble Σ sera défini de façon à ce que la classe de processus obtenus quand λ varie soit stable par *association*[2]. Suivant Harris [3], nous dirons que deux processus (ξ_t) et (ξ_t^*), prenant leurs valeurs dans $\mathscr{P}(S)$, sont *associés* si, pour tout $t\geqq 0$,

$$(0.1)\quad \mathbb{P}_\xi(\xi_t\cap\eta\neq\emptyset)=\mathbb{P}_\eta^*(\xi_t^*\cap\xi\neq\emptyset),$$

où ξ et η sont deux éléments de $\mathscr{P}(S)$, l'un des deux au moins étant fini. La relation (0.1) entraîne pour les générateurs $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}^*$ des deux processus la propriété suivante:

$$(0.2)\quad \mathscr{L}\theta_\eta(\xi)=\mathscr{L}^*\theta_\xi(\eta)$$

où $\theta_\eta(\xi)=1$, si $\eta\cap\xi\neq\emptyset$, et $\theta_\eta(\xi)=0$, sinon.

---

* Ce travail a été fait alors que le deuxième des auteurs séjournait au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique de Paris, avec une bourse de la Coordenaçao do Aperfeiçoamento do Pessoal de Nivel Superior (CAPES: 476/73)

[1] On dira qu'une fonction $f\colon \mathscr{P}(S)\to\mathbb{R}$ est cylindrique s'il existe un ensemble fini $A\subset S$, tel que $f(\eta)=f(\eta\cap A)$, pour tout $\eta\in\mathscr{P}(S)$

[2] La notion d'*association* a été étudiée récemment dans plusieurs articles dont [7, 8 et 9]

Maintenant, si π et σ sont deux applications de $\mathscr{P}(S)$ dans $\mathscr{P}(S)$, les générateurs élémentaires $\mathscr{L}_\pi f = f \circ \pi - f$ et $\mathscr{L}_\sigma = f \circ \sigma - f$ satisfont la condition (0.2) si et seulement si $\theta_\eta(\pi(\xi)) = \theta_\xi(\sigma(\eta))$. Or, il est très facile de démontrer la

(0.3) **Proposition (cf. Harris [2]).** *Si π est une application de $\mathscr{P}(S)$ dans $\mathscr{P}(S)$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une application σ de $\mathscr{P}(S)$ dans $\mathscr{P}(S)$ telle que*

(0.4) $\theta_\eta(\pi(\xi)) = \theta_\xi(\sigma(\eta))$,

pour tout couple ξ et η de parties de S, est que $\pi(\xi) = \bigcup_{x \in \xi} \pi(\{x\})$, pour tout ξ. Pour un tel π, les formules

(0.5) $\pi^*(\{x\}) = \{y \in S \mid x \in \pi(\{y\})\}$

et

$$\pi^*(\xi) = \bigcup_{x \in \xi} \pi^*(\{x\})$$

définissent l'unique transformation σ, telle que (0.4) *soit vérifiée.*

(Dans la suite, nous noterons assez souvent (et abusivement) x au lieu de $\{x\}$. Nous désignerons par $\mathscr{P}_f(S)$ l'ensemble des parties finies de S.)

La proposition (0.3) nous amène à définir Σ comme l'ensemble de toutes les applications π: $\mathscr{P}(S) \to \mathscr{P}(S)$ qui vérifient les conditions:

(0.6) $\pi(\xi) = \bigcup_{x \in \xi} \pi(x)$, pour tout $\xi \in \mathscr{P}(S)$,

(0.7) $\pi(x) \in \mathscr{P}_f(S)$, pour tout $x \in S$,

(0.8) $Z_\pi = \{x \in S \mid \pi(x) \neq \{x\}\} \in \mathscr{P}_f(S)$.

Nous remarquons qu'une application π appartient à Σ si et seulement si $\pi^* \in \Sigma$.

Dans le cas où S est fini, Harris a montré dans [2] que la classe des processus markoviens ayant un générateur de la forme (0.0) (λ étant quelconque) est stable par association et que le processus dont le générateur est $\mathscr{L} f = \sum_{\pi \in \Sigma} \lambda(\pi)\,(f \circ \pi - f)$ a pour associé le processus dont le générateur est $\mathscr{L}^* f = \sum_{\pi \in \Sigma} \lambda(\pi)\,(f \circ \pi^* - f)$. (C'est une conséquence immédiate du fait que $\theta_\eta(\pi(\xi)) = \theta_\xi(\pi^*(\eta))$, pour tout $\pi \in \Sigma$.)

Dans cet article, il sera question du cas général où S est dénombrable[3]. Nous allons imposer à λ des conditions telles qu'il existera un processus de Feller construit explicitement et admettant $\mathscr{L}$ comme générateur sur les fonctions cylindriques. Nous allons d'abord construire une famille de versions du processus sur $\mathscr{P}_f(S)$. Ensuite, par association et grâce à la propriété de couplage fort, nous passerons à l'espace $\mathscr{P}(S)$. Plus précisément, nous démontrerons les théorèmes suivants:

---

[3] Au moment de la publication de ce texte, les auteurs ont appris que Harris venait de rédiger un nouvel article [12], dans lequel il considère des processus définis par la classe Σ sur un espace dénombrable

Théorème 1. 1) *Soit une application* $\lambda\colon \Sigma \to \mathbb{R}_+$ *vérifiant la condition*

$$(0.9)\qquad \sum_{\pi \in I_x} \lambda(\pi) = \alpha_x < \infty,$$

pour tout $x \in S$, *où* $I_x = \{\pi \in \Sigma \mid \pi(x) \neq \{x\}\}$. *Alors il existe un espace de probabilités* $(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P})$ *sur lequel on peut construire, pour tout* $A \in \mathscr{P}_f(S)$, *une version* $(\xi_t^A, 0 \leqq t < T_\infty^A)$ *du processus markovien de sauts sur* $\mathscr{P}_f(S)$, *d'état initial* A, *de durée de vie* T_∞^A, *et de générateur* $\mathscr{L}$ *défini pour tout couple* C *et* D *d'éléments de* $\mathscr{P}_f(S)$ *par:*

$$\mathscr{L}(C, D) = \sum_{\pi : \pi(C) = D} \lambda(\pi), \qquad si\ C \neq D$$

$$\mathscr{L}(C, C) = -\sum_{F \neq C} \mathscr{L}(C, F), \qquad sinon,$$

et telle que:

$$T_\infty^A = \inf_{x \in A} T_\infty^x \qquad et$$

$$(0.10)\qquad \xi_t^A = \bigcup_{x \in A} \xi_t^x, \qquad pour\ tout\ t \in [0, T_\infty^A[.$$

2) *Si l'on suppose en outre que:*

$$(\mathrm{G})\qquad \sup_{x \in S} \alpha_x = \beta < \infty,$$

$$(\mathrm{H})\qquad \sup_{x \in S} \sum_{\pi} \lambda(\pi)(|\pi(x)| - 1) = c < \infty,$$

alors, pour tout $A \in \mathscr{P}_f(S)$, *le processus n'explose pas (c'est-à-dire:* $T_\infty^A = \infty$ *p.s. et* $|\xi_t^A| \leqq |A|\, e^{ct}$, *quel que soit* $t \geqq 0$).

(Dans l'énoncé de la deuxième partie du théorème, $|A|$ désigne le cardinal de l'ensemble A.)

Remarque. La propriété (0.10) entraîne la propriété de *couplage fort*[4] suivante pour la version considérée dans le théorème 1: pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathscr{P}_f(S)$, et pour tout $t \in [0, T_\infty^{A \cup B}[$, on a:

$$\xi_t^{A \cup B} = \xi_t^A \cup \xi_t^B.$$

Théorème 2. *Si en plus des conditions* (G) *et* (H) *du théorème* 1, *l'application* λ *satisfait aussi les conditions:*

$$(\mathrm{G}')\qquad \sup_{x \in S} \sum_{\pi : \pi^* \in I_x} \lambda(\pi) = \beta^* < \infty,$$

et

$$(\mathrm{H}')\qquad \sup_{x \in S} \sum_{\pi} \lambda(\pi)(|\pi^*(x)| - 1) = c^* < \infty$$

alors, pour tout $\eta \in \mathscr{P}(S)$, *les fonctions aléatoires,* $(\xi_t^\eta, t \geqq 0)$ *et* $(\xi_t^{*\eta}, t \geqq 0)$, *à valeurs dans*

4 Dans un article écrit en même temps que celui-ci ([7]), Gray et Griffeath mentionnent aussi la propriété de couplage fort, qu'ils utilisent pour construire des exemples de non-unicité

$\mathscr{P}(S)$, définies sur l'espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P})$ du théorème 1 par:

$$\xi_t^\eta = \bigcup_{x \in \eta} \xi_t^x \quad et \quad \xi_t^{*\eta} = \bigcup_{x \in \eta} \xi_t^{*x}$$

sont des versions continues à droite admettant des limites à gauche des processus de Markov, d'état initial η, de générateurs respectifs

$$\mathscr{L} f = \sum_\pi \lambda(\pi)(f \circ \pi - f) \quad et \quad \mathscr{L}^* f = \sum_\pi \lambda(\pi)(f \circ \pi^* - f),$$

où f est une fonction cylindrique quelconque. Ils vérifient la propriété d'association et définissent des semi-groupes de Feller.

Remarque 1. L'ensemble $\mathring{\mathscr{P}}(S)$ est muni de sa topologie habituelle, isomorphe à la topologie produit de $\{0, 1\}^S$.

Remarque 2. Il est facile de voir que sous les conditions (G) et (H) et la condition supplémentaire:

$$\text{(0.11)} \quad \sup_{\pi: x \in \pi(Z_\pi)} \lambda(\pi)|Z_\pi| < \infty$$

les hypothèses du théorème 2 sont vérifiées.

Remarquons enfin la propriété suivante:

Théorème ergodique. *Si en plus des conditions du théorème 2 on a $c^* < 0$, alors le processus de générateur $\mathscr{L}$ est ergodique.*

Avant de passer aux démonstrations des théorèmes, nous voulons souligner le fait que la classe de processus étudiée ici contient nombre de systèmes considérés jusqu'alors, comme le montrent les exemples suivants:

Exemple 1. Processus de branchement avec interférence et processus de proximité.

Ces processus ont été introduits par Holley et Liggett dans [4]. Soient les applications $\pi_{x,F} \in \Sigma$, où $x \in S$ et $F \in \mathscr{P}_f(S)$, définies par:

$$\pi_{x,F}(x) = F,$$

$$\pi_{x,F}(y) = \{y\}, \qquad y \in S,\ y \neq x.$$

Le processus de branchement avec interférence est défini sur $\mathscr{P}_f(S)$. Son générateur est donné par:

$$\mathscr{L} f = \sum_{\substack{x \in S \\ F \in \mathscr{P}_f(S)}} k(x)\, p(x, F)\, [f \circ \pi_{x,F} - f],$$

où k est une application bornée de S dans R_+ et $p(x, \cdot)$ une mesure de probabilité sur $\mathscr{P}_f(S)$. La condition (G) est vérifiée et la condition (H) le sera si:

$$\text{(0.12)} \quad \sup_{x \in S} \sum_F k(x)\, p(x, F)(|F| - 1) < \infty.$$

Le processus de proximité est obtenu par association. Il est défini à l'aide des transformations $\pi^*_{x,F}$ données par la formule (0.5):

$$\pi^*_{x,F}(y) = \begin{cases} \{y, x\}, & \text{si } y \in F \\ \{y\}, & \text{si } y \notin F \text{ et } y \neq x. \end{cases}$$

$$\pi^*_{x,F}(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{si } x \in F \\ \emptyset, & \text{si } x \notin F. \end{cases}$$

Son générateur s'écrit donc sous la forme

$$\mathscr{L}^* f = \sum_{\substack{x \in S \\ F \in \mathscr{P}_f(S)}} k(x)\, p(x, F)\, (f \circ \pi^*_{x,F} - f).$$

Compte-tenu de la remarque 2, il est facile de voir que les conditions du théorème 2 seront vérifiées si, en plus de (0.12) nous avons aussi

$$\sup_{x \in S} \sum_{F: x \in F} \sum_{y \in F} k(y)\, p(y, F) < \infty.$$

(Cette dernière condition est la réécriture pour ce processus de la condition (0.11).)

Exemple 2. Modèle du Votant de Holley et Liggett (cf. [4]). C'est un cas particulier important de l'exemple 1. On prend $S = \mathbb{Z}^d$, $k(\cdot) \equiv 1$ et $p(x, F) = 0$, si $|F| \neq 1$.

Exemple 3. Processus de Contact (cf. Harris [1]). C'est encore un cas particulier très important des processus considérés dans l'exemple 1. Etant donné un sous-ensemble fini fixé N de S, on pose:

$$\lambda(\pi_{x,F}) = \begin{cases} 1, & \text{si } F = \emptyset \\ \varepsilon, & \text{si } F = \{x, x+y\}, \ y \in N \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(Nous utilisons les mêmes notations que dans l'exemple 1.) Il est facile de voir que ce processus est auto-associé, puisque

$$\pi^*_{x,\emptyset} = \pi_{x,\emptyset}, \qquad \pi^*_{x,\{x,x+y\}} = \pi_{x+y,\{x,x+y\}} \quad \text{et} \quad \lambda(\pi^*_{x,\{x,x+y\}}) = \lambda(\pi_{x+y,\{x,x+y\}}) = \varepsilon.$$

On remarque que pour ce processus les conditions du théorème 2 sont remplies et celles du Théorème ergodique le seront si $\varepsilon < 1/|N|$, puisque $c^* = c = |N|\varepsilon - 1$.

Exemple 4. Processus d'exclusion simple symétrique (cf. Spitzer [10]). Soit q une probabilité de transition symétrique sur S. Pour tout couple $\{x, y\}$ non-ordonné d'éléments distincts de S, on définit l'élément σ_{xy} de Σ par:

$$\sigma_{xy}(x) = y$$
$$\sigma_{xy}(y) = x$$
$$\sigma_{xy}(z) = z, \qquad \text{pour tout } z \in S, \ z \neq x, \ z \neq y.$$

Soit λ l'application de Σ dans R_+ définie par:

$$\lambda(\sigma_{xy}) = q(x, y)$$
$$\lambda(\pi) = 0 \qquad \text{si } \pi \notin \{\sigma_{xy}\}.$$

Le générateur $\mathscr{L}$ est celui du processus d'exclusion simple symétrique. Les conditions du théorème 2 sont toujours vérifiées et le processus est auto-associé.

Exemple 5. Un processus de sauts sur $\mathscr{P}_f(S)$ peut ne pas exploser et avoir un associé qui explose.

On considère une suite $\{\theta_x : x \in S\}$ d'éléments de Σ définis de la façon suivante: $\theta_x(z) = \{z\}$, pour tout $z \in S$, $z \neq x$, et $\theta_x(x) = \{x, a\}$, où a est un élément fixé de S, et une application $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}_+$ qui est nulle en dehors de la suite $\{\theta_x\}$. Les conditions (G) et (H) sont vérifiées.

Pour l'associé, on a $\theta_x^*(a) = \{a, x\}$ et $\theta_x^*(y) = \{y\}$, si $y \neq a$.
Dans le cas où $\sum_x \lambda(\theta_x) = \infty$, le processus $(\xi_t^{*,a})$ explose tout de suite.

I. Démonstration du théorème 1

1. Soit $A \in \mathscr{P}_f(S)$. On va définir le processus de saut ξ_t^A par ses temps de sauts successifs $T_1^A, T_2^A, \ldots$ éventuellement infinis et ses positions successives A_0, A_1, A_2 aux instants $0, T_1^A, T_2^A, \ldots$ en posant

$$\xi_t^A = A_n, \quad \text{si } T_n^A \leqq t < T_{n+1}^A$$

pour tout $t: 0 \leqq t < T_\infty^A$, où $T_\infty^A = \lim_{n \to +\infty} T_n^A$ désigne la durée de vie du processus avec la convention $T_0^A = 0$, $A_0 = A$. On notera $(\mathfrak{F}_t^A)\, t \in R_+$ les tribus associées au processus.

Les suites (T_n^A) et (A_n) vont être construites de manière que:

1) Conditionnellement en $\mathfrak{F}_{T_n^A}$, celles des variables aléatoires $T_{n+1}^A - T_n^A$ qui sont finies suivent des lois exponentielles respectives de paramètre $\sum_{\pi : \pi(A_n) \neq A_n} \lambda(\pi)$ et sont indépendantes entre elles.

2) La suite (A_n) est une chaîne de Markov d'état initial A et de matrice de transition

$$Q(C, D) = \frac{\sum_{\pi : \pi(C) = D} \lambda(\pi)}{\sum_{\pi : \pi(C) \neq C} \lambda(\pi)}, \quad \text{si } \sum_{\pi : \pi(C) \neq C} \lambda(\pi) > 0 \text{ et } C \neq D,$$

$$Q(C, D) = 1, \quad \text{si } \sum_{\pi : \pi(C) \neq C} \lambda(\pi) = 0 \text{ et } C = D,$$

et

$$Q(C, D) = 0, \quad \text{sinon}.$$

Soit $(N^\pi,\ \pi \in \Sigma)$ une famille de processus ponctuels de Poisson sur R_+, indépendants, de paramètres respectifs $\lambda(\pi)$ définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{B}, P)$. Quitte à réduire l'espace Ω, on peut supposer que les temps de saut de l'ensemble de ces processus sont distincts deux à deux, puisque Σ est dénombrable.

On introduit le processus de Poisson N, σ fini, au sens de Ito [5], défini sur $]0, \infty[\times \Sigma$, muni de la tribu produit de la tribu borélienne et de la tribu des parties de Σ, de la manière suivante:

$$N(B\times I,\cdot)=\sum_{\pi\in I} N^{\pi}(B,\cdot) \qquad \forall B\in\mathscr{B}(]0,\infty[), \qquad \forall I\subset\Sigma.$$

Soit $\mathscr{A}_t$ la tribu engendrée par les variables aléatoires

$$\{N(]0,s]\times I,\cdot);\ 0<s\leqq t,\ I\subset\Sigma\}.$$

Soit pour tout $A\in\mathscr{P}_f(S)$, $I_A=\{\pi\in\Sigma:\ \pi(A)\neq A\}$.

Nous posons par définition

$$T_1^A=\inf\{t>0:\ N(]0,t]\times I_A)>0\} \qquad \text{si } \sum_{\pi\in I_A}\lambda(\pi)>0,$$

$$T_1^A=+\infty \qquad \text{si } \sum_{\pi\in I_A}\lambda(\pi)=0.$$

L'hypothèse 1 entraîne: $\sum_{\pi\in I_A}\lambda(\pi)\leqq\sum_{x\in A}\alpha_x<\infty$. Par conséquent, si l'on exclut le second cas – dans lequel le processus ξ_t^A sera constant et égal à A – il résulte d'une propriété bien connue que T_1^A est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\sum_{\pi\in I_A}\lambda(\pi)$ et que la norme inférieure est atteinte pour un seul élément de Σ, soit π_1^A. On dit que π_1^A opère à l'instant T_1^A.

On sait que π_1^A et T_1^A sont des variables aléatoires indépendantes et que

$$P(\pi_1^A=\sigma)=\frac{\lambda(\sigma)}{\sum_{\pi\in I_A}\lambda(\pi)}, \qquad \text{si } \sigma(A)\neq A$$

$$P(\pi_1^A=\sigma)=0, \qquad \text{sinon}.$$

On note

$$A_1=\pi_1^A(A), \qquad \text{si } \sum_{\pi\in I_A}\lambda(\pi)>0.$$

A_1 est un sous ensemble aléatoire de S qui représente l'état du processus ξ_t^A après son premier saut, et sa loi est donnée par

$$P(A_1=B)=\frac{\sum_{\pi:\pi(A)=B}\lambda(\pi)}{\sum_{\pi\in I_A}\lambda(\pi)}, \qquad \text{si } \sum_{\pi\in I_A}\lambda(\pi)>0 \text{ et } A\neq B,$$

$$P(A_1=B)=1, \qquad \text{si } \sum_{\pi\in I_A}\lambda(\pi)=0 \text{ et } A=B,$$

et

$$P(A_1=B)=0, \qquad \text{sinon}.$$

Pour poursuivre la construction des temps de saut T_n^A, remarquons que T_1^A est un temps d'arrêt pour le processus N et que A_1 est $\mathfrak{F}_{T_1^A}$ mesurable; nous allons utiliser la remarque générale suivante.

Soit T un temps d'arrêt pour le processus N et I un sous-ensemble aléatoire de Σ $\mathfrak{F}_T$ mesurable tel que $\sum_{\pi\in I}\lambda(\pi)<\infty$. On définit la variable $S(T,I)$ par:

$$S(T,I)=\inf\{t\colon t>T \text{ et } N(]T,t]\times I)>0\},\quad \text{si } T<\infty \text{ et } \sum_{\pi\in I}\lambda(\pi)>0,$$

$$S(T,I)=+\infty,\qquad \text{sinon.}$$

Un théorème d'Ito [5] permet d'affirmer que les processus $\tau_T N$ et $\alpha_T N$, respectivement translatés du temps T et arrêtés au temps T, sont indépendants et que $\tau_T N$ a même loi que N. Par conséquent, conditionnellement à $\mathfrak{F}_T$, $S(T,I)$ se comporte comme T_1^A, c'est-à-dire:

1) Si elle est finie, la variable aléatoire $S(T,I)-T$ est exponentielle de paramètre $\sum_{\pi\in I}\lambda(\pi)$,

2) Si $S(T,I)$ est fini, le minimum est opéré par un seul π, soit $\pi(T,I)$.

3) La loi de $\pi(T,I)$ est donnée par:

$$P(\pi(T,I)=\sigma)=\frac{\lambda(\sigma)}{\sum_{\pi\in I}\lambda(\pi)},\qquad \text{si } \sigma\in I,$$

$$P(\pi(T,I)=\sigma)=0,\qquad \text{sinon.}$$

On remarque de plus que $S(T,I)$ est un temps d'arrêt pour le processus N puisque $\{S(T,I)\leqq t\}=\{T<t\}\cap\{\tau_T N(]0,t-T]\times I)>0\}$ et que, sur l'ensemble $\{T<t\}$, le deuxième terme est $\mathscr{A}_t$ mesurable.

Si on pose alors par récurrence $T_{n+1}^A=S(T_n^A, I_{A_n})$ et

$$A_{n+1}=\pi(T_n^A, I_{A_n})(A_n)$$

les propriétés (I.1.1) sont vérifiées et le processus de saut est construit.

2. D'après la construction précédente, on peut écrire:

$$\xi_t^A=\pi_n\circ\pi_{n-1}\circ\cdots\circ\pi_1(A),\qquad \text{si } T_n^A\leqq t<T_{n+1}^A.$$

Cette relation et la propriété «d'additivité» des applications π permettent de prouver facilement la formule de couplage fort. On considère les temps de saut $\{(T_n^x)_{n\in N},\ x\in A\}$ compris entre 0 et $\inf_{x\in A} T_\infty^x$ et on les ordonne suivant la suite strictement croissante V_n; on note σ_n l'élément de Σ qui opère à l'instant V_n. Un instant V_n peut représenter un ou plusieurs instants du type T_n^x, mais dans ce cas, le même σ_n opère sur les processus ξ_t^x à l'instant V_n. Nous allons démontrer par récurrence sur n la propriété $\mathscr{S}_n$ suivante, qui entraîne le résultat de couplage. $\mathscr{S}_n$: pour $V_n\leqq t<V_{n+1}$, on a:

a) $t<T_\infty^A$

b) $t\neq V_n$ n'est pas un temps de saut pour ξ_t^A

c) $\forall x\in A$, $\xi_t^x=\sigma_n\circ\sigma_{n-1}\circ\cdots\sigma_1(x)$
et $\quad\xi_t^A=\sigma_n\circ\sigma_{n-1}\circ\cdots\circ\sigma_1(A)$.

On suppose donc $\mathscr{S}_p$ vraie pour $1 \leqq p \leqq n$. Selon que V_{n+1} est ou non un temps de saut pour (ξ_t^x), on a: $\xi_{V_{n+1}}^x = \sigma_{n+1}(\xi_{V_n}^x) \neq \xi_{V_n}^x$ ou $\xi_{V_{n+1}}^x = \xi_{V_n}^x = \sigma_{n+1}(\xi_{V_n}^x)$. De même pour (ξ_t^A), car, si V_{n+1} est un de ses temps de saut, c'est σ_{n+1} qui opère sur lui à cet instant.

La propriété c est donc démontrée par l'hypothèse de récurrence. D'autre part, il ne peut y avoir de temps de saut de (ξ_t^A) strictement compris entre V_{n+1} et V_{n+2} car alors, en notant π l'application qui opérerait sur lui à cet. instant, on aurait: $\pi(\xi_{t^+}^A) \neq \xi_{t^-}^A$ avec $\xi_{t^-}^A = \xi_{V_{n+1}}^A = \bigcup_{x \in A} \xi_{V_{n+1}}^x$ donc $\pi(\xi_{V_{n+1}}^x)$ serait différent de $\xi_{V_{n+1}}^x$ pour au moins un x dans A, et t serait un temps de saut pour ξ^x. Il reste à montrer: $T_\infty^A \leqq \inf_{x \in A} T_\infty^x$. Prouvons pour cela, par récurrence, que, pour tout n, $T_n^A < \inf_{x \in A} T_\infty^x$ sur l'ensemble où $\inf_{x \in A} T_\infty^x$ est fini. Sur cet ensemble, T_{n+1}^A est fini, et le processus de Poisson $\tau_{T_n^A} N$ a un nombre fini de sauts dans le produit de compacts $[T_n^A, T_{n+1}^A] \times \{\bigcup_{z \in A_n} I_z\}$. Or tout saut de (ξ_t^x), $x \in A$, dans l'intervalle $[T_n^A, T_{n+1}^A[$, est de ce type puisqu'une application π qui change $\xi_{V_n}^x$, pour $x \in A$, sans changer la réunion $\xi_{V_n}^A = \bigcup_{x \in A} \xi_{V_n}^x$, change au moins un point de $\xi_{V_n}^A$. Donc il y a un nombre fini de sauts de chaque ξ^x, $x \in A$, dans l'intervalle $[T_n^A, T_{n+1}^A[$ et $T_{n+1}^A < \inf_{x \in A} T_\infty^x$, là où cet inf est fini.

3. On va montrer que, sous l'hypothèse 2) supplémentaire du théorème 1, le processus n'explose pas.

Pour tout n, pour tout $A \in \mathscr{P}_f(S)$, on a l'égalité:

$$|\xi_{t \wedge T_n^A}^A| = |A| + \sum_n \int_0^{t \wedge T_n^A} dN^\pi(s)\,(|\pi(\xi_{s^-}^A)| - |\xi_{s^-}^A|)$$

et donc aussi:

$$E(|\xi_{t \wedge T_n^A}^A|) = |A| + \sum_\pi \lambda(\pi)\, E\left(\int_0^{t \wedge T_n^A} ds(|\pi(\xi_s^A)| - |\xi_s^A|)\right). \tag{I.3.1}$$

De l'hypothèse (H) du thèorème 1, on déduit:

$$\sum_\pi \lambda(\pi)\,(|\pi(\xi_s^A)| - |\xi_s^A|) \leqq \sum_{x \in \xi_s^A} [\sum_\pi \lambda(\pi)\,(|\pi(x)| - 1)] \leqq c\,|\xi_s^A|. \tag{I.3.2}$$

De (I.3.1) et (I.3.2), on tire

$$E(|\xi_{t \wedge T_n^A}^A|) \leqq |A| + c\, E\left(\int_0^{t \wedge T_n^A} |\xi_s^A|\, ds\right) \leqq |A| + c\, E\left(\int_0^t |\xi_{s \wedge T_n^A}^A|\, ds\right)$$

de sorte que l'inégalité de Gronwall donne:

$$E(|\xi_{t \wedge T_n^A}^A|) \leqq e^{ct}|A|, \qquad \forall n \in N. \tag{I.3.3}$$

De la même facon, on peut écrire:

$$E(\sum_m 1_{(T_m^A \leqq t)}) = \sum_\pi \lambda(\pi)\, E\left(\int_0^{t \wedge T_n^A} 1_{(\pi(\xi_s^A) \neq \xi_s^A)}\, ds\right).$$

L'hypothèse (1) du théorème 1 permet donc d'écrire, en posant

$$v_t^A = \sum_{m \in N} 1_{(T_m^A \leq t)}$$

$$E(v_{t \wedge T_n^A}^A) \leqq \beta E\left(\int_0^{t \wedge T_n^A} |\xi_s^A|\, ds\right) \leqq \beta E\left(\int_0^t |\xi_{s \wedge T_n^A}^A|\, ds\right)$$

et de (I.3.3) on dèduit

(I.3.4) $\quad E(v_{t \wedge T_n^A}^A) \leqq \beta |A|\, e^{ct}, \ \forall\, n \in N.$

d'où $E(v_t^A) \leqq \beta |A|\, e^{ct}$

et $v_t^A < \infty$ p.s.

donc $T_\infty^A = +\infty$ p.s.

De plus, un passage à la limite dans (I.3.3) donne:

$$E(|\xi_t^A|) \leqq |A|\, e^{ct}, \qquad t \in R_+.$$

II. Démonstration du théorème 2

Lemme. *Sous les conditions du théorème 2, il existe deux processus markoviens de saut $(\xi_t, t \geqq 0)$ et $(\xi_t^*, t \geqq 0)$ à valeurs dans $\mathscr{P}_f(S)$ qui ont respectivement $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}^*$ pour générateur infinitésimal, sont associés et qui possèdent la propriété de couplage fort.*

Démonstration. L'existence des deux processus résulte immédiatement du théorème 1.

Pour montrer la propriété d'association, supposons d'abord que $c = \sum_{\pi \in \Sigma} \lambda(\pi)$ est fini. On peut alors écrire, pour A et B dans $\mathscr{P}_f(S)$,

$$\begin{aligned} P(\xi_t^A \cap B = \emptyset) &= \sum_{\substack{n \geqq 0 \\ \pi_1 \ldots \pi_n}} e^{-tc} \frac{t^n}{n!} \lambda(\pi_1) \ldots \lambda(\pi_n)\, 1_{(\pi_n \circ \cdots \circ \pi_1(A) \cap B = \emptyset)} \\ &= \sum_{\substack{n \geqq 0 \\ \pi_1 \ldots \pi_n}} e^{-tc} \frac{t^n}{n!} \lambda(\pi_1) \ldots \lambda(\pi_n)\, 1_{(A \cap \pi_1^* \circ \cdots \circ \pi_n^*(B) = \emptyset)} \\ &= P(\xi_t^{*,B} \cap A = \emptyset). \end{aligned}$$

Dans le cas général, on considère des ensembles finis Σ_n croissant vers Σ et les générateurs $\mathscr{L}_n f(\cdot) = \sum_{\pi \in \Sigma_n} \lambda(\pi)[f(\pi(\cdot)) - f(\cdot)]$ et $\mathscr{L}_n^* f(\cdot) = \sum_{\pi \in \Sigma_n} \lambda(\pi)[f(\pi^*(\cdot)) - f(\cdot)]$ sur $\mathscr{P}_f(S)$. Les processus $(\xi_t^{n,\cdot}, t \geqq 0)$ et $(\xi_t^{*,n,\cdot}, t \geqq 0)$, de générateurs $\mathscr{L}_n$ et $\mathscr{L}_n^*$ sur $\mathscr{P}_f(S)$, construits comme au théorème 1, sont associés d'après la remarque précédente. Or, il est facile de voir que $\mathscr{L}_n(f) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathscr{L}(f)$ et $\mathscr{L}_n^*(f) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathscr{L}^*(f)$ pour toute fonction f cylindrique; en conséquence, pour tout $A \in \mathscr{P}_f(S)$, pour tout $t \geqq 0$, $\xi_t^{n,A}$ converge p.s. vers ξ_t^A et $\xi_t^{*,n,A}$ converge p.s. vers $\xi_t^{*,A}$ quand $n \to \infty$, ce qui implique l'association de $(\xi_t^{\cdot}, t \geqq 0)$ et $(\xi_t^{*\cdot}, t \geqq 0)$.

Démonstration du théorème 2. 1) Par association des processus à valeurs $\mathscr{P}_f(S)$, *on peut écrire:*

(II.1) $P(\xi_t^A \cap B = \emptyset) = P(\xi_t^{*,B} \cap A = \emptyset), \quad A, B \in \mathscr{P}_f(S).$

Soient η et τ deux éléments de $\mathscr{P}(S)$; approchons les par deux suites croissantes $(A_n)_{n\in N}$ et $(B_n)_{n\in N}$ d'ensembles finis. Puisque $\xi_t^{A_n}$ croit vers ξ_t^η et que $\xi_t^{B_n}$ croit vers ξ_t^τ lorsque n tend vers l'infini, on obtient, en passant à la limite dans (II.1),

(II.2) $P(\xi_t^\eta \cap \tau = \emptyset) = P(\xi_t^{*,\tau} \cap \eta = \emptyset), \quad \eta, \tau \in \mathscr{P}(S).$

L'égalité précédente est essentielle dans la suite de la démonstration et assure a priori que ξ_t et ξ_t^* sont associés.

2) On pose: $Q_t(\eta,.) = P(\xi_t^\eta \in \cdot)$ pour tout $\eta \in \mathscr{P}(S)$, et on va montrer que $(\xi_t^\cdot, t \geqq 0)$ est un processus de Markov de semi-groupe Q_t et que Q_t est un semi-groupe de Feller.

Pour cela, on remarque que Q_t possède les deux propriétés suivantes:

a) sa restriction à $\mathscr{P}_f(S)$ est encore un semi-groupe

b) l'application: $\eta \to Q_t(\eta,.)$ est, pour tout t, une application vaguement continue de $\mathscr{P}(S)$ dans l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathscr{P}(S)$.

a) résulte immédiatement de la propriété de Markov appliquée à (ξ_t^A) puisque:

$$\begin{aligned} Q_{t+s}(A,B) &= P(\xi_{t+s}^A = B) \\ &= Q_s Q_t(A,B), \qquad \forall t, \forall s \in R_+. \end{aligned}$$

Pour démontrer b), il faut prouver que $\lim_{\eta\to\eta_0} Q_t f(\eta) = Q_t f(\eta_0)$ pour tout t dans R_+ et toute fonction f continue sur $\mathscr{P}(S)$. En fait, il suffit déjà de le montrer pour les fonctions f du type θ_B, $B \in \mathscr{P}_f(S)$, définies par $\theta_B(\eta) = 1$ si $B \cap \eta \neq \emptyset$, $\theta_B(\eta) = 0$ sinon. Or, par (II.2)

$$Q_t \theta_B(\eta) = P(\xi_t^\eta \cap B = \emptyset) = P(\xi_t^{*B} \cap \eta = \emptyset)$$

et lorsque η tend vers η_0, à partir d'un certain «rang», η et η_0 sont égaux sur l'ensemble fini ξ_t^{*B}, donc

$$\lim_{\eta\to\eta_0} Q_t \theta_B(\eta) = P(\xi_t^{*B} \cap \eta_0 = \emptyset) = Q_t \theta_B(\eta_0).$$

(ξ_t) est un processus de Markov de semi-groupe (Q_t).

Il nous faut montrer que

(II.3) $E[f(\xi_s^\eta)\, g(\xi_{s+t}^\eta)] = \int Q_s(\eta, d\xi)\, f(\xi) \int Q_t(\xi, d\eta)\, g(\eta),$
$\qquad f \in \mathscr{C}(\mathscr{P}(S)), \quad g \in \mathscr{C}(\mathscr{P}(S)).$

On sait déjà que cette égalité a lieu lorsque η est fini. Dans le cas général, on considère une suite d'ensembles finis A_n croissant vers η. Alors, $\xi_s^{A_n}$ et $\xi_{s+t}^{A_n}$ croissent respectivement vers ξ_s^η et ξ_{s+t}^η, donc le théorème de convergence dominée permet un passage à la limite dans le membre de gauche de (II.3) et la continuité de l'application $\eta \to Q_t(\eta,.)$ permet de passer à la limite à droite.

3) *Le générateur de ξ_t est donné par $\mathscr{L}$ sur les functions cylindriques.*

a) Montrons d'abord que pour toute fonction cylindrique f, la série $\mathscr{L}f$ est uniformément convergente sur $\mathscr{P}(S)$. Les valeurs de $f(\eta)$ ne dépendent que des coordonnées de η qui appartiennent à l'ensemble fini U.

On a donc:

$$\sum_{\pi} \lambda(\pi)\,|f(\pi(\eta))-f(\eta)| \leqq \sum_{\pi:\,\pi(\eta)\cap U \neq \eta\cap U} \lambda(\pi)\, 2\,\|f\|.$$

Or:

$$\sum_{\pi:\,\pi(\eta)\cap U \neq \eta\cap U} \lambda(\pi) \leqq \sum_{x\in U}\ \sum_{\pi(\eta)\cap\{x\}\neq\eta\cap\{x\}} \lambda(\pi)$$

et le second membre de l'expression précédente est majoré par:

$$\sum_{x\in U}\ \sum_{\pi:\,\pi(x)=\emptyset} \lambda(\pi) + \sum_{x\in U}\ \sum_{\pi:\,\exists y\neq x\ tq\ \pi(y)\ni x} \lambda(\pi),$$

soit

$$\sum_{\pi:\,\pi(\eta)\cap U\neq\eta\cap U} \lambda(\pi) \leqq |U|\,[\sup_x \sum_{\pi:\,\pi(x)\neq\emptyset} \lambda(\pi) + \sup_x \sum_{\pi:\,\pi^*(x)\ni y\neq x} \lambda(\pi)].$$

b) Il nous suffit de prouver que pour toute fonction cylindrique du type θ_B, avec $|B|<\infty$, la fonction $t\to \mathbb{E}(\theta_B(\xi_t^\eta))$ a une dérivée égale à $\mathscr{L}\theta_B(\eta)$, pour tout sous ensemble η de S.

Soit une suite A_n d'ensembles finis croissant vers η. On sait que, pour tout $n\in N$, on a:

$$\mathbb{E}(\theta_B(\xi_t^{A_n})) = \theta_B(A_n) + \sum_{\pi} \lambda(\pi)\,\mathbb{E}\left(\int_0^t [\theta_B(\pi(\xi_s^{A_n})) - \theta_B(\xi_s^{A_n})]\,ds\right).$$

Par définition de ξ_t^η, le membre de gauche croît vers $E(\theta_B(\xi_t^\eta))$ et le membre de droite tend vers $\int_0^t \mathscr{L}\theta_B(\xi_s^\eta)\,ds$ par le théorème de convergence dominée.

4) Pour tout η inclus dans S, la fonction aléatoire (ξ_t^η) est p.s. continue à droite et admet des limites à gauche. En effet, la propriété est déjà vraie pour $\eta\in\mathscr{P}_f(S)$ par construction même. Si $\eta\in\mathscr{P}(S)$, soit A_n une suite d'ensembles finis croissant vers η. Pour tout $x\in S$, $\left(M_t^{A_n} = \theta_x(\xi_t^{A_n}) - \theta_x(A_n) - \int_0^t \mathscr{L}\theta_x(\xi_s^{A_n})\,ds,\ t\geqq 0\right)$ est une martingale cad lag. Pour tout $t\geqq 0$, $M_t^{A_n}$ converge presque sûrement vers $M_t^\eta = \theta_x(\xi_t^\eta) - \theta_x(\eta) - \int_0^t \mathscr{L}\theta_x(\xi_s^\eta)\,ds$, car θ_x et $\mathscr{L}\theta_x$ sont continues bornées.

L'inégalité de Doob permet d'écrire:

$$\text{(II.4)}\qquad \mathbb{E}(\sup_{u\leqq t} |M_u^{A_n} - M_u^{A_p}|^2) \leqq 4\,\mathbb{E}(|M_t^{A_n} - M_t^{A_p}|^2)$$

et l'expression de droite tend vers 0 lorsque n et p tendent vers l'infini par le théorème de convergence dominée. Donc une sous suite de $M_u^{A_n}(\omega)$ converge, p.s. en

ω, uniformément en u sur $[0,t]$, vers $M_u^\eta(\omega)$. Par suite la martingale $(M_t^\eta, t \geqq 0)$ est p.s. cad lag et comme l'expression $\int_0^t \mathscr{L}\theta_x(\xi_s^\eta)\,ds$ est continue en t, les fonctions $t \to \theta_x(\xi_t^\eta)$ sont cad lag. pour tout x, et donc aussi la fonction ξ_t^η.

Remerciements. Nous tenons à remercier M.T. Harris qui nous a familiarisés avec la notion d'association lors de son séjour à l'Ecole Polytechnique, ainsi que M.J. Neveu pour l'aide constante qu'il nous a apportée au cours de ce travail.

Bibliographie

1. Harris, T.E.: Contact interactions on a lattice. Ann. Probability **2**, 969–988 (1974)
2. Harris, T.E.: Graphical representations of associate processes, Séminaire sur les systèmes à une infinité de particules. Ecole Polytechnique, Paris (1975)
3. Harris, T.E.: On a class of set-valued Markov processes. Ann. Probability **4**, 175–194 (1976)
4. Holley, R., Liggett, T.: Ergodic theorems for weakly interacting systems and the voter model. Ann. Probability **3**, 43–663 (1975)
5. Ito, K.: Poisson point processes attached to Markov processes. Proc. 6th Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab., vol. **3**, 225–241 (1972), University of California Press (Berkeley)
6. Neveu, J.: Processus ponctuels, Ecole d'Eté de Probabilités de St Flour 1976. Lect. Notes in Math. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977
7. Gray, L., Griffeath, D.: On the uniqueness and nonuniqueness of proximity processes. Preprint 1976
8. Holley, R., Strook, D.: Dual processes and their application to infinite interacting systems. Advances in Math. [A paraître]
9. Schwartz, D.: Application of duality to a class of Markov processes. Ann. Probability [A paraître]
10. Spitzer, F.: Recurrent random walk of an infinite particle system. Trans. Amer. Math. Soc. **198**, 191–199 (1974)
11. Sullivan, W.G.: Markov processes for random fields. Comm. Dublin Inst. Adv. Studies Ser. A, No **23**, 1–75 (1975)
12. Harris, T.E.: Additive set-valued Markov processes and percolation methods. Preprint 1976

Reçu le 1 Novembre 1976; en forme révisée le 20 Juin 1977