Introdução elementar à modelagem estocástica de cadeias simbólicas

CEPID NeuroMat

Universidade de São Paulo

NUMEC

Agosto de 2013

Uma conjectura em neurobiologia

Vários autores sugerem que a consolidação de memórias de eventos vivenciados durante a vigília ocorre durante o período de sono REM.

frontiers IN NEUROSCIENCE

Novel experience induces persistent sleep-dependent plasticity in the cortex but not in the hippocampus

Sidarta Ribeiro[1,2,*], Xinwu Shi[3], Matthew Engelhard[3], Yi Zhou[3], Hao Zhang[3], Damien Gervasoni[4], Shi-Chieh Lin[3], Kazuhiro Wada[3], Nelson A. M. Lemos[1,2] and Miguel A. L. Nicolelis[1,3,5]

Episodic and spatial memories engage the hippocampus during acquisition but migrate to the cerebral cortex over time. We have recently proposed that the interplay between slow-wave (SWS) and rapid eye movement (REM) sleep propagates recent synaptic changes from the hippocampus to the cortex. To test this theory, we jointly assessed extracellular neuronal activity, local field potentials (LFP), and expression levels of plasticity-related immediate-early genes (IEG) *arc* and *zif-268* in rats exposed to novel spatio-tactile experience. Post-experience firing rate increases were strongest in SWS and lasted much longer in the cortex (hours) than in the hippocampus (minutes). During REM sleep, firing rates showed strong temporal dependence across brain areas: cortical activation during experience predicted hippocampal activity in the first post-experience hour, while hippocampal activation during experience predicted cortical activity in the third post-experience hour. Four hours after experience, IEG expression was specifically upregulated during REM sleep in the cortex, but not in the hippocampus. *Arc* gene expression in the cortex was proportional to LFP amplitude in the spindle-range (10–14 Hz) but not to firing rates, as expected from signals more related to dendritic input than to somatic output. The results indicate that hippocampo-cortical activation during waking is followed by multiple waves of cortical plasticity as full sleep cycles recur. The absence of equivalent changes in the hippocampus may explain its mnemonic disengagement over time.

"Episodic and spatial memories engage the hippocampus during acquisition but migrate to the cerebral cortex over time. We have recently proposed that the interplay between slow-wave (SWS) and rapid eye movement (REM) sleep propagates recent synaptic changes from the hippocampus to the cortex..."

Por causa disso, no Projeto NeuroMat encontramos o parágrafo

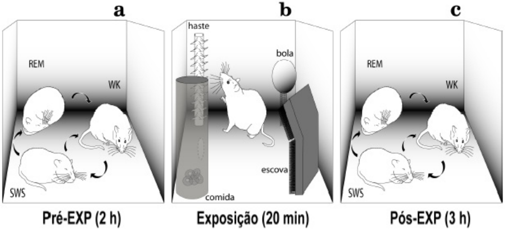
"... The project enquires about the mechanisms underlying the acquisition and transformation of memories over time, with a focus on the cognitive role of sleep. This issue is largely unresolved, despite important recent research. In particular, it has been conjectured that sleep promotes the corticalization of hippocampus-dependent memories (Ribeiro and Nicolelis, 2004) ..."

Pergunta

Como obter evidências experimentais que corroborem ou refutem essa conjectura?

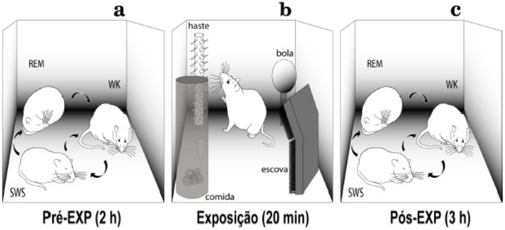
Experiência feita por Sidarta Ribeiro et al. (2007)

- Objetivo: verificar a “reverberação” durante o sono REM de experiências vivenciadas durante a vigília.
- 6 ratos da linhagem Long Evans foram criados em um ambiente controlado onde nunca tiveram contato com objetos geometricamente complexos.



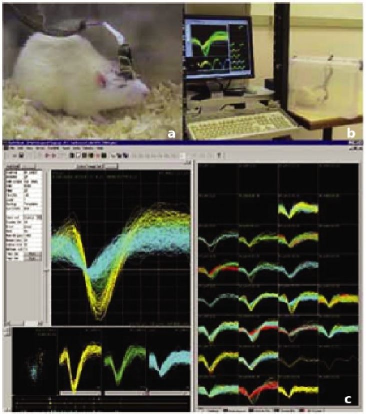
Experiência feita por Sidarta Ribeiro et al. (2007)

- Pré-exposição: o rato permanece numa caixa vazia e escura durante 2h.
- Exposição: quatro objetos (bola, escova, haste e tubo de comida) são colocados na caixa junto com o rato durante 20 min.
- Pós-exposição: o rato permanece mais de 2h na caixa esvaziada de objetos.



Experiência feita por Sidarta Ribeiro et al. (2007)

- Durante toda a experimento o rato é filmado e tem a atividade elétrica de cerca de 100 neurônios registrada.

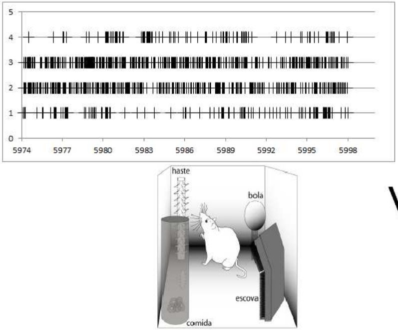


Pergunta

Como analisar os registros assim coletados para encontrar evidências que corroborem ou refutem essa conjectura ?

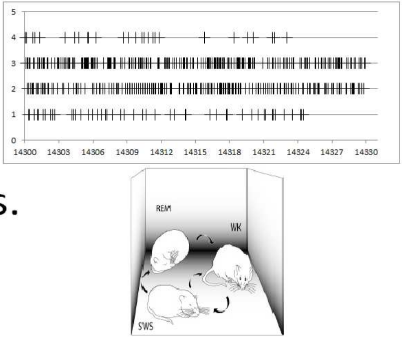
Primeira Ideia (ingênua)

Verificar se as sequências de disparos registradas durante a exposição de um objeto reaperece de maneira idêntica, ou muito aproximada, durante o sono REM.



Exposição (20 min)

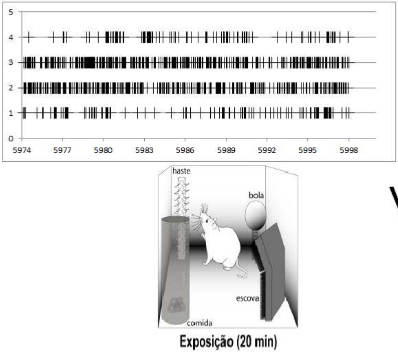
Vs.



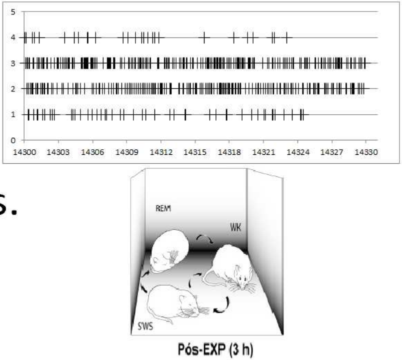
Pós-EXP (3 h)

Primeira Ideia (ingênua)

Será que as sequências de disparos, ou pedaços substanciais delas, são iguais nos dois períodos?

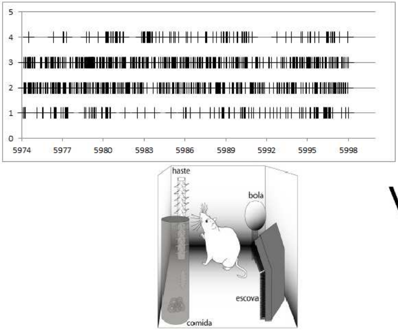


Vs.



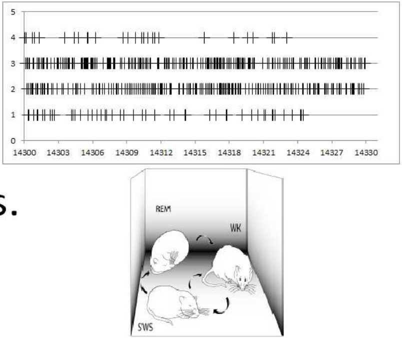
Primeira Ideia (ingênua)

Será que as sequências de disparos, ou pedaços substanciais delas, são iguais nos dois períodos?



Exposição (20 min)

Vs.



Pós-EXP (3 h)

- R.: Não são iguais.

O que fazer?

M. Gromov: “...The task of mathematics and mathematicians is to find new structural patterns unperceivable by direct intuition and common sense...”

O que fazer?

M. Gromov: “...The task of mathematics and mathematicians is to find new structural patterns unperceivable by direct intuition and common sense...”

- Como encontrar esses *padrões* que não são visíveis a olho nu?

O que fazer?

M. Gromov: "...The task of mathematics and mathematicians is to find new structural patterns unperceivable by direct intuition and common sense..."

- Como encontrar esses *padrões* que não são visíveis a olho nu?
- Aliás: o que é um *padrão*?

O que fazer?

M. Gromov: "...The task of mathematics and mathematicians is to find new structural patterns unperceivable by direct intuition and common sense..."

- Como encontrar esses *padrões* que não são visíveis a olho nu?
- Aliás: o que é um *padrão*?
- Uma possível definição de padrão é: ''*conjunto consistente de regularidades estatísticas*''.

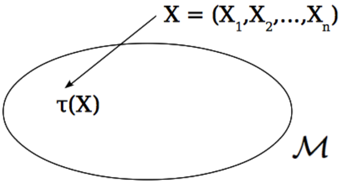
O que fazer?

M. Gromov: "...The task of mathematics and mathematicians is to find new structural patterns unperceivable by direct intuition and common sense..."

- Como encontrar esses *padrões* que não são visíveis a olho nu?
- Aliás: o que é um *padrão*?
- Uma possível definição de padrão é: '*'conjunto consistente de regularidades estatísticas"*.
- Proposta NeuroMat: encontrar *padrões* fazendo **seleção estatística de modelos.**

Ingredientes:

- uma **classe de modelos** $\mathcal{M}$;
- um **princípio** para selecionar um modelo $\tau(X) \in \mathcal{M}$ a partir de uma amostra $X = (X_1, \cdots, X_n)$.



Seleção estatística de modelos

Um princípio de seleção de modelos típico leva em conta duas condições:

- escolher o modelo que maximiza a probabilidade de ocorrência da amostra;
- escolher o menor modelo possível. Isto é, escolher o modelo que tem a menor quantidade de graus de liberdade.

Um modelo é um algoritmo capaz de gerar uma sequência de 0's e 1's

- gerando esses símbolos um por um

Um modelo é um algoritmo capaz de gerar uma sequência de 0's e 1's

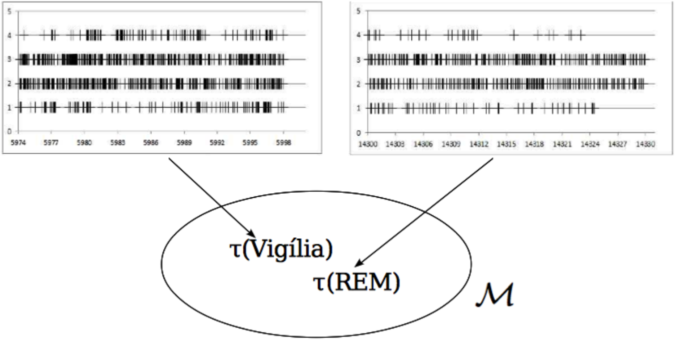
- gerando esses símbolos um por um
- e escolhendo cada novo símbolo em função de
  - um número sorteado ao acaso em no intervalo $[0, 1]$
  - e os últimos k símbolos produzidos até aquela etapa.

Um modelo é um algoritmo capaz de gerar uma sequência de 0's e 1's

- gerando esses símbolos um por um
- e escolhendo cada novo símbolo em função de
  - um número sorteado ao acaso em no intervalo $[0, 1]$
  - e os últimos k símbolos produzidos até aquela etapa.

Observação: na última linha k é um número inteiro positivo qualquer fixado (exemplo: $k = 0$ ou $k = 1$ ou $k = 2$...).

Seleção estatística de modelos



- Será que os modelos estatísticos $\tau(\text{vigília})$ e $\tau(\text{sono REM})$ são iguais?
- Se não forem iguais, será que são próximos (em que sentido)?

Classe $\mathcal{M}_0$: sequências de símbolos independentes

- $\mathcal{M}_0$ é o conjunto das sequências nos quais os disparos ocorrem independentemente uns dos outros.
- Exemplo: as sequências de 1's e 0's indicando se houve ou não um disparo, em cada instante, é obtida lançando-se sucessivamente uma moeda.

Classe $\mathcal{M}_0$: sequências de símbolos independentes

- $\mathcal{M}_0$ é o conjunto das sequências nos quais os disparos ocorrem independentemente uns dos outros.
- Exemplo: as sequências de 1's e 0's indicando se houve ou não um disparo, em cada instante, é obtida lançando-se sucessivamente uma moeda. Em outra palavras,

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{se houve um disparo} \\ 0, & \text{se não houve um disparo} \end{cases},$$

onde n indica o índice da janela de tempo no qual foi feita a observação .

Como simular uma sequência de símbolos independentes?

- Utilizamos uma sequência $U_1, U_2, \cdots$ de números escolhidos independentemente uns dos outros com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$.
  - Utilizando, por exemplo, os 2 últimos dígitos do celular de cada um dos alunos.

Como simular uma sequência de símbolos independentes?

- Utilizamos uma sequência $U_1, U_2, \cdots$ de números escolhidos independentemente uns dos outros com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$.
  - Utilizando, por exemplo, os 2 últimos dígitos do celular de cada um dos alunos.
- Defino, para cada $n = 1, 2, 3, \cdots$

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < p \\ 1, & \text{se } U_n \geq p \,, \end{cases}$$

onde $p \in (0, 1)$ é um parâmetro fixado.

Exercício

Simular o lançamento de uma moeda honesta ($p = 0.5$).

Lembre que

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < 0.5 \\ 1, & \text{se } U_n \geq 0.5 \end{cases}$$

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
X					

Exercício

Simular o lançamento de uma moeda honesta ($p = 0.5$).

Lembre que

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < 0.5 \\ 1, & \text{se } U_n \geq 0.5 \end{cases}$$

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
X	0				

Exercício

Simular o lançamento de uma moeda honesta ($p = 0.5$).

Lembre que

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < 0.5 \\ 1, & \text{se } U_n \geq 0.5 \end{cases}$$

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
X	0	1			

Exercício

Simular o lançamento de uma moeda honesta ($p = 0.5$).

Lembre que

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < 0.5 \\ 1, & \text{se } U_n \geq 0.5 \end{cases}$$

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
X	0	1	0		

Exercício

Simular o lançamento de uma moeda honesta ($p = 0.5$).

Lembre que

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < 0.5 \\ 1, & \text{se } U_n \geq 0.5 \end{cases}$$

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
X	0	1	0	1	

Exercício

Simular o lançamento de uma moeda honesta ($p = 0.5$).

Lembre que

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < 0.5 \\ 1, & \text{se } U_n \geq 0.5 \end{cases}$$

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
X	0	1	0	1	1

Exercício

Simular o lançamento de uma moeda desonesta ($p = 0.2$).

$$Y_n = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < 0.2 \\ 1, & \text{se } U_n \geq 0.2 \end{cases}$$

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
Y					

Exercício

Simular o lançamento de uma moeda desonesta ($p = 0.2$).

$$Y_n = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < 0.2 \\ 1, & \text{se } U_n \geq 0.2 \end{cases}$$

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
Y	1				

Exercício

Simular o lançamento de uma moeda desonesta ($p = 0.2$).

$$Y_n = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < 0.2 \\ 1, & \text{se } U_n \geq 0.2 \end{cases}$$

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
Y	1	1			

Exercício

Simular o lançamento de uma moeda desonesta ($p = 0.2$).

$$Y_n = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < 0.2 \\ 1, & \text{se } U_n \geq 0.2 \end{cases}$$

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
Y	1	1	0		

Exercício

Simular o lançamento de uma moeda desonesta ($p = 0.2$).

$$Y_n = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < 0.2 \\ 1, & \text{se } U_n \geq 0.2 \end{cases}$$

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
Y	1	1	0	1	

Exercício

Simular o lançamento de uma moeda desonesta ($p = 0.2$).

$$Y_n = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < 0.2 \\ 1, & \text{se } U_n \geq 0.2 \end{cases}$$

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
Y	1	1	0	1	1

Classe $\mathcal{M}_1$: Cadeias de Markov de alcance 1

As cadeias de Markov são as sequências que podem ser geradas a partir de um algorítmo do tipo:

1. Inicialização: escolho Z_0;
2. Para $n \geq 1$, defino $Z_n =$ Função(Z_{n-1}, U_n).

Exercício

Simular $Z_1, \cdots, Z_{20}$, utilizando $Z_0 = 1$ e a função definida abaixo.

$$Z_n = \text{Função}(Z_{n-1}, U_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < p(Z_{n-1}) \\ 1, & \text{se } U_n \geq p(Z_{n-1}), \end{cases}$$

com $p(0) = 0.7$ e $p(1) = 0.3$.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
Z					

Exercício

Simular $Z_1, \cdots, Z_{20}$, utilizando $Z_0 = 1$ e a função definida abaixo.

$$Z_n = \text{Função}(Z_{n-1}, U_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < p(Z_{n-1}) \\ 1, & \text{se } U_n \geq p(Z_{n-1}), \end{cases}$$

com $p(0) = 0.7$ e $p(1) = 0.3$.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
Z	0				

Exercício

Simular $Z_1, \cdots, Z_{20}$, utilizando $Z_0 = 1$ e a função definida abaixo.

$$Z_n = \text{Função}(Z_{n-1}, U_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < p(Z_{n-1}) \\ 1, & \text{se } U_n \geq p(Z_{n-1}), \end{cases}$$

com $p(0) = 0.7$ e $p(1) = 0.3$.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
Z	0	1			

Exercício

Simular $Z_1, \cdots, Z_{20}$, utilizando $Z_0 = 1$ e a função definida abaixo.

$$Z_n = \text{Função}(Z_{n-1}, U_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < p(Z_{n-1}) \\ 1, & \text{se } U_n \geq p(Z_{n-1}), \end{cases}$$

com $p(0) = 0.7$ e $p(1) = 0.3$.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
Z	0	1	0		

Exercício

Simular $Z_1, \cdots, Z_{20}$, utilizando $Z_0 = 1$ e a função definida abaixo.

$$Z_n = \text{Função}(Z_{n-1}, U_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < p(Z_{n-1}) \\ 1, & \text{se } U_n \geq p(Z_{n-1}), \end{cases}$$

com $p(0) = 0.7$ e $p(1) = 0.3$.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
Z	0	1	0	0	

Exercício

Simular $Z_1, \cdots, Z_{20}$, utilizando $Z_0 = 1$ e a função definida abaixo.

$$Z_n = \text{Função}(Z_{n-1}, U_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < p(Z_{n-1}) \\ 1, & \text{se } U_n \geq p(Z_{n-1}), \end{cases}$$

com $p(0) = 0.7$ e $p(1) = 0.3$.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
Z	0	1	0	0	1

Exercício

Simular $W_1, \cdots, W_{20}$, utilizando $W_0 = 1$, onde para $n \geq 1$,

$$W_n = \text{Função}(W_{n-1}, U_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < p(W_{n-1}) \\ 1, & \text{se } U_n \geq p(W_{n-1}) \end{cases}$$

com $p(0) = 0.6$ e $p(1) = 0.1$.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
W					

Exercício

Simular $W_1, \cdots, W_{20}$, utilizando $W_0 = 1$, onde para $n \geq 1$,

$$W_n = \text{Função}(W_{n-1}, U_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < p(W_{n-1}) \\ 1, & \text{se } U_n \geq p(W_{n-1}) \end{cases}$$

com $p(0) = 0.6$ e $p(1) = 0.1$.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
W	1				

Exercício

Simular $W_1, \cdots, W_{20}$, utilizando $W_0 = 1$, onde para $n \geq 1$,

$$W_n = \text{Função}(W_{n-1}, U_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < p(W_{n-1}) \\ 1, & \text{se } U_n \geq p(W_{n-1}) \end{cases}$$

com $p(0) = 0.6$ e $p(1) = 0.1$.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
W	1	1			

Exercício

Simular $W_1, \cdots, W_{20}$, utilizando $W_0 = 1$, onde para $n \geq 1$,

$$W_n = \text{Função}(W_{n-1}, U_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < p(W_{n-1}) \\ 1, & \text{se } U_n \geq p(W_{n-1}) \end{cases}$$

com $p(0) = 0.6$ e $p(1) = 0.1$.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
W	1	1	0		

Exercício

Simular $W_1, \cdots, W_{20}$, utilizando $W_0 = 1$, onde para $n \geq 1$,

$$W_n = \text{Função}(W_{n-1}, U_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < p(W_{n-1}) \\ 1, & \text{se } U_n \geq p(W_{n-1}) \end{cases}$$

com $p(0) = 0.6$ e $p(1) = 0.1$.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
W	1	1	0	0	

Exercício

Simular $W_1, \cdots, W_{20}$, utilizando $W_0 = 1$, onde para $n \geq 1$,

$$W_n = \text{Função}(W_{n-1}, U_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < p(W_{n-1}) \\ 1, & \text{se } U_n \geq p(W_{n-1}) \end{cases}$$

com $p(0) = 0.6$ e $p(1) = 0.1$.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
W	1	1	0	0	1

Procurando regularidades nas amostras

Quais são regularidades estatísticas que podem ser observadas nessas sequências X, Y, Z e W?

n	Proporção de 1's	
	X	Z
10	0,8	0,9
50	0,42	0,44
100	0,54	0,54
500	0,502	0,49
1000	0,502	0,476
10000	0,5039	0,5055

- As proporções de símbolos 1's nas sequências X e Z são próximas a 0.5.

- Portanto, a convergência da proporção de 1's a 0.5 é uma característica comum às amostras X e Z.
- No entanto elas não foram geradas por mecanismos da mesma classe: X foi gerada por um modelo em $\mathcal{M}_0$ e Z por um modelo em $\mathcal{M}_1$
- Assim, a proporção de 1's não é uma regularidade estatística capaz de distinguir as sequências X e Z.

- Como identificar a diferença entre os modelos que geraram as sequências X e Z?
- Vejamos, por exemplo, as proporções dos pares 11:

n	Proporção de 11's	
	X	Z
10	0,5556	0,7778
50	0,2245	0,3265
100	0,3333	0,4040
500	0,2766	0,3347
1000	0,2722	0,3273
10000	0,2569	0,3526

Resumindo

Vamos chamar de

$$\hat{p}^X(1), \hat{p}^Y(1), \hat{p}^Z(1), \hat{p}^W(1)$$

e

$$\hat{p}^X(11), \hat{p}^Y(11), \hat{p}^Z(11), \hat{p}^W(11)$$

as proporções de símbolos 1's e de pares de símbolos 11's encontrados nas sequências simuladas X, Y, Z e W respectivamente.

Resumindo

n	Proporção de 1's		Proporção de 11's	
	X	Z	X	Z
10	0,8	0,9	0,5556	0,7778
50	0,42	0,44	0,2245	0,3265
100	0,54	0,54	0,3333	0,4040
500	0,502	0,49	0,2766	0,3347
1000	0,502	0,476	0,2722	0,3273
10000	0,5039	0,5055	0,2569	0,3526

Então,

$$\hat{p}^X(1) \approx \hat{p}^Z(1) \approx 0,5$$

$$0,25 \approx \hat{p}^X(1) \cdot \hat{p}^X(1) \approx \hat{p}^X(11) \neq \hat{p}^Z(11) \approx 0,35$$

Resumindo

n	Proporção de 1's		Proporção de 11's	
	Y	W	Y	W
10	1	1	1	1
50	0,74	0,78	0,5306	0,6939
100	0,81	0,83	0,6364	0,7374
500	0,78	0,794	0,6192	0,7014
1000	0,799	0,788	0,6456	0,7057
10000	0,8027	0,8046	0,6451	0,7239

Então,

$$\hat{p}^Y(1) \approx \hat{p}^W(1) \approx 0,8$$

$$0,64 \approx \hat{p}^Y(1) \cdot \hat{p}^Y(1) \approx \hat{p}^Y(11) \neq \hat{p}^W(11) \approx 0,72$$

Resumindo

- O fato das proporções convergirem para um valor bem determinado quando o tamanho da amostra cresce não é um acaso! Na literatura esse resultado é conhecido como Lei dos Grandes Números.

Classe $\mathcal{M}_2$: Cadeias de Markov de alcance 2

$\mathcal{M}_2$ é o conjunto das sequências aleatórias que podem ser geradas a partir de um algorítmo do tipo:

1. Inicialização: escolho o par (X_0, X_1).
2. Para $n \geq 2$, $X_n =$ Função(X_{n-2}, X_{n-1}, U_n)

Exercício

Simular $T_1, \cdots, T_{20}$, utilizando $T_0 = 1, T_1 = 1$ e a função definida abaixo.

$$T_n = \text{Função}(T_{n-2}, T_{n-1}, U_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < p(T_{n-2}, T_{n-1}) \\ 1, & \text{se } U_n \geq p(T_{n-2}, T_{n-1}), \end{cases}$$

com $p(0,0) = 0.2, p(0,1) = 0.5, p(1,0) = 0.6$ e $p(1,1) = 0.7$.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
T					

Exercício

Simular $T_1, \cdots, T_{20}$, utilizando $T_0 = 1, T_1 = 1$ e a função definida abaixo.

$$T_n = \text{Função}(T_{n-2}, T_{n-1}, U_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < p(T_{n-2}, T_{n-1}) \\ 1, & \text{se } U_n \geq p(T_{n-2}, T_{n-1}), \end{cases}$$

com $p(0,0) = 0.2, p(0,1) = 0.5, p(1,0) = 0.6$ e $p(1,1) = 0.7$.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
T	0				

Exercício

Simular $T_1, \cdots, T_{20}$, utilizando $T_0 = 1, T_1 = 1$ e a função definida abaixo.

$$T_n = \text{Função}(T_{n-2}, T_{n-1}, U_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < p(T_{n-2}, T_{n-1}) \\ 1, & \text{se } U_n \geq p(T_{n-2}, T_{n-1}), \end{cases}$$

com $p(0,0) = 0.2, p(0,1) = 0.5, p(1,0) = 0.6$ e $p(1,1) = 0.7$.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
T	0	1			

Exercício

Simular $T_1, \cdots, T_{20}$, utilizando $T_0 = 1, T_1 = 1$ e a função definida abaixo.

$$T_n = \text{Função}(T_{n-2}, T_{n-1}, U_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < p(T_{n-2}, T_{n-1}) \\ 1, & \text{se } U_n \geq p(T_{n-2}, T_{n-1}), \end{cases}$$

com $p(0,0) = 0.2, p(0,1) = 0.5, p(1,0) = 0.6$ e $p(1,1) = 0.7$.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
T	0	1	0		

Exercício

Simular $T_1, \cdots, T_{20}$, utilizando $T_0 = 1, T_1 = 1$ e a função definida abaixo.

$$T_n = \text{Função}(T_{n-2}, T_{n-1}, U_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < p(T_{n-2}, T_{n-1}) \\ 1, & \text{se } U_n \geq p(T_{n-2}, T_{n-1}), \end{cases}$$

com $p(0,0) = 0.2, p(0,1) = 0.5, p(1,0) = 0.6$ e $p(1,1) = 0.7$.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
T	0	1	0	0	

Exercício

Simular $T_1, \cdots, T_{20}$, utilizando $T_0 = 1, T_1 = 1$ e a função definida abaixo.

$$T_n = \text{Função}(T_{n-2}, T_{n-1}, U_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n < p(T_{n-2}, T_{n-1}) \\ 1, & \text{se } U_n \geq p(T_{n-2}, T_{n-1}), \end{cases}$$

com $p(0,0) = 0.2, p(0,1) = 0.5, p(1,0) = 0.6$ e $p(1,1) = 0.7$.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
T	0	1	0	0	1

Classe $\mathcal{M}_k$: Cadeias de Markov de alcance k

Podemos definir de maneira análoga $\mathcal{M}_3$, $\mathcal{M}_4, \ldots, \mathcal{M}_k, \ldots$

$\mathcal{M}_k$ é o conjunto das sequências que podem ser geradas a partir de um algorítmo do tipo:

1. Inicialização: escolho $(X_0, X_2, \cdots, X_{k-1})$;
2. para $n \geq k$, $X_n =$ Função$(X_{n-k}, \cdots, X_{n-1}, U_n)$.

Classe de modelos - $\mathcal{M}$

A nossa classe geral de modelos até agora, fica definida como:

$$\mathcal{M} = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{M}_k$$

Classe de modelos - $\mathcal{M}$

Qual o problema com essa classe de modelos?

- Dizer que uma sequência de disparos pode ser bem descrita por um modelo de $\mathcal{M}_{10}$, por exemplo, não é muito elucidativo. Que sentido biológico tem $k = 10$?
- Fazer estatística com $\mathcal{M}_{10}$ é algo na prática muito difícil, temos que contar frequêcias relativas do tipo

$$N_n(a_1 \cdots a_{10}) = \begin{array}{l}\text{o número de vezes que } a_1 \cdots a_{10} \\ \text{aparece na amostra}\end{array}$$

Exemplo

Para uma amostra de tamanho $n = 128000$ observamos que

$$N_n(0100101001) = 1.$$

Há sequências de tamanho 10 que nem aparecem na amostra!

Das 1024 possíveis de tamanho 10, só 208 aparecem na amostra.

Exemplo

Para uma amostra de tamanho $n = 128000$ observamos que

$$N_n(0100101001) = 1.$$

Há sequências de tamanho 10 que nem aparecem na amostra! Das 1024 possíveis de tamanho 10, só 208 aparecem na amostra.

Mas por sorte quando olhamos dados científicos frequentemente o tamanho do passado pertinente a ser olhado depende do próprio passado.

Em geral não precisamos olhar sempre janelas muito grandes.

Exemplo: sequência rítmica

Vejamos a sequência

$$\ldots\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2$$

Exemplo: sequência rítmica

Vejamos a sequência

$$\ldots\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2$$

- Como seria um algoritmo que gerasse essa sequência símbolo por símbolo?
- Em outras palavras, dado uma sequência de símbolos já gerados que regra usamos para determinar o próximo símbolo?

Exemplo: sequência rítmica

$X_n = ?$

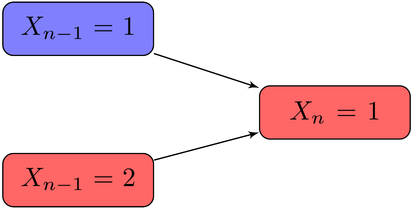
Exemplo: sequência rítmica

$$\begin{tikzcd} X_{n-1} = 1 \arrow[dr] & \\ & X_n = ? \\ X_{n-1} = 2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

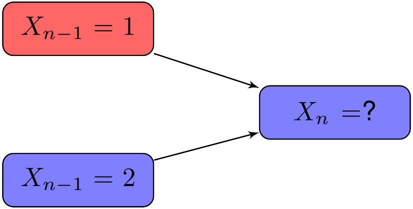
Exemplo: sequência rítmica

$$\begin{tikzcd}
X_{n-1} = 1 \arrow[dr] & \\
& X_n = ? \\
X_{n-1} = 2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

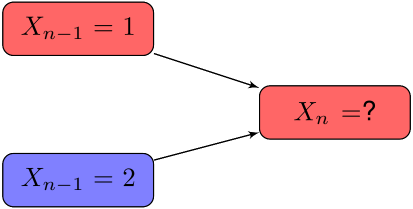
Exemplo: sequência rítmica



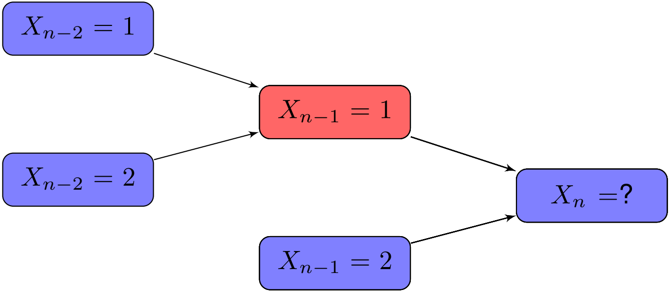
Exemplo: sequência rítmica



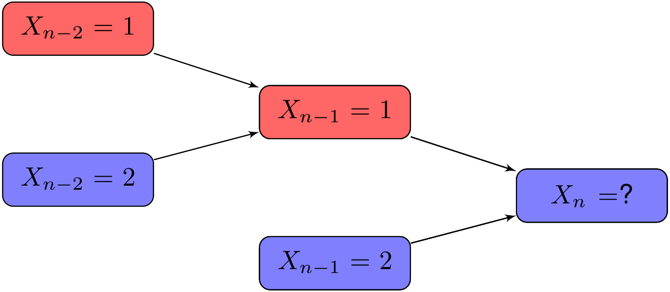
Exemplo: sequência rítmica



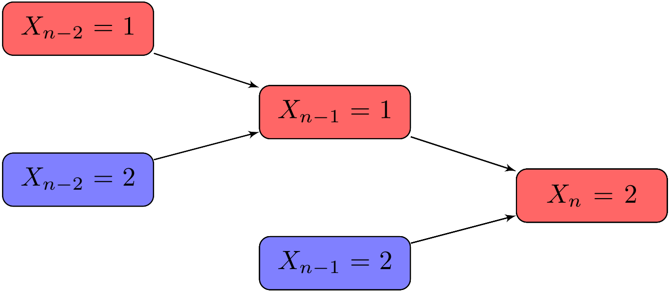
Exemplo: sequência rítmica



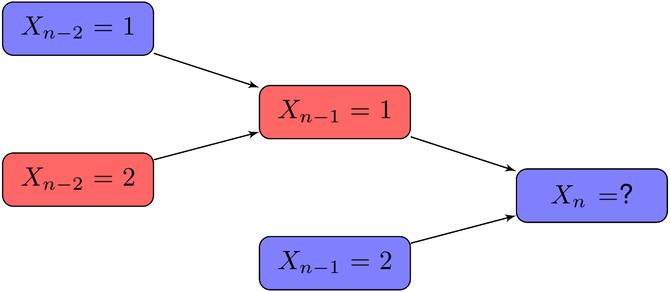
Exemplo: sequência rítmica



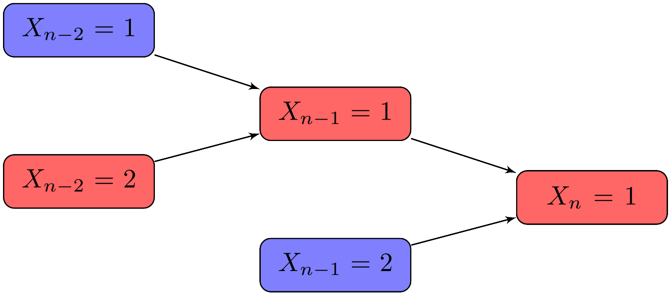
Exemplo: sequência rítmica



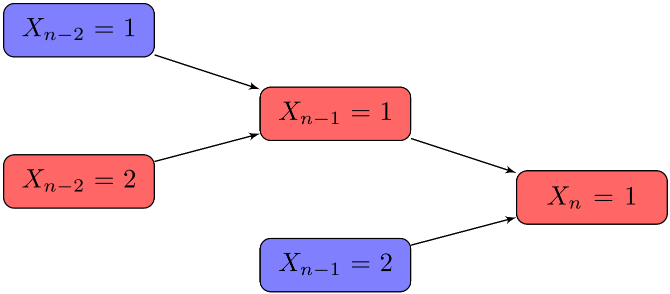
Exemplo: sequência rítmica



Exemplo: sequência rítmica



Exemplo: sequência rítmica



Conclusão: o número de símbolos já produzidos que devemos olhar para determinar o próximo símbolo, depende da sequência já produzida.

Outra classe de modelos

Há um mecânismo muito simples para gerar sequências aleatórias que não é de Markov para nenhum alcance k: de alcance infinito

$$\begin{aligned} S_n &= \text{Função}(S_{n-1}, S_{n-2}, \cdots, U_n) \\ &= \text{Função}\left(\begin{array}{l} \text{número de passos antes de n} \\ \text{até encontrar o primeiro 1} \end{array}, U_n \right) \end{aligned}$$

Exemplo

1. Se $S_{n-1} = 1$ então $S_n = 1$ com probabilidade $\frac{1}{2}$.
2. Se $S_{n-2} = 1$ e $S_{n-1} = 0$ então $S_n = 1$ com probabilidade $\frac{3}{4}$.
3. Se $S_{n-3} = 1$ e $S_{n-2} = S_{n-1} = 0$ então $S_n = 1$ com probabilidade $\frac{7}{8}$.
4. Em geral se $S_{n-k} = 1$ e $S_{n-k-1} = \ldots = S_{n-1} = 0$ então $S_n = 1$ com probabilidade $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$.

Exercício

Gere $S_1, S_2, \dots S_{20}$ com o algoritmo apresentado anteriormente inicializando com $S_0 = 1$ e usando a mesma sequência de uniformes $U_1, \dots, U_{20}$ da tabela.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
S					

Exercício

Gere $S_1, S_2, \ldots S_{20}$ com o algoritmo apresentado anteriormente inicializando com $S_0 = 1$ e usando a mesma sequência de uniformes $U_1, \ldots, U_{20}$ da tabela.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
S	0				

Exercício

Gere $S_1, S_2, \ldots S_{20}$ com o algoritmo apresentado anteriormente inicializando com $S_0 = 1$ e usando a mesma sequência de uniformes $U_1, \ldots, U_{20}$ da tabela.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
S	0	1			

Exercício

Gere $S_1, S_2, \ldots S_{20}$ com o algoritmo apresentado anteriormente inicializando com $S_0 = 1$ e usando a mesma sequência de uniformes $U_1, \ldots, U_{20}$ da tabela.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
S	0	1	0		

Exercício

Gere $S_1, S_2, \ldots S_{20}$ com o algoritmo apresentado anteriormente inicializando com $S_0 = 1$ e usando a mesma sequência de uniformes $U_1, \ldots, U_{20}$ da tabela.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
S	0	1	0	1	

Exercício

Gere $S_1, S_2, \ldots S_{20}$ com o algoritmo apresentado anteriormente inicializando com $S_0 = 1$ e usando a mesma sequência de uniformes $U_1, \ldots, U_{20}$ da tabela.

	1	2	3	4	5
U	0.28	0.82	0.08	0.55	0.70
S	0	1	0	1	1

Será que sequências assim aparecem em dados de neurobiologia?

Será que sequências assim aparecem em dados de neurobiologia?

Surpresa: 25% dos neurônios do hipocampo descritos em Ribeiro et.al (2007), são amostras de sequências geradas por mecânismos desse tipo.

Será que sequências assim aparecem em dados de neurobiologia?

Surpresa: 25% dos neurônios do hipocampo descritos em Ribeiro et.al (2007), são amostras de sequências geradas por mecânismos desse tipo.

Como nós sabemos disso?

Será que sequências assim aparecem em dados de neurobiologia?

Surpresa: 25% dos neurônios do hipocampo descritos em Ribeiro et.al (2007), são amostras de sequências geradas por mecânismos desse tipo.

Como nós sabemos disso?

Fizemos seleção de modelos em uma classe $\tilde{\mathcal{M}}$ mais ampla, formada por $\mathcal{M}$ e pelas cadeias com memória de alcance variável, usando uma versão do algoritmo contexto de Rissanen e alternativamente SMC, desenvolvido pela equipe do projeto Neuromat.

O que é algoritmo contexto?

O que é SMC?

O que é algoritmo contexto?

O que é SMC?

Assunto para a próxima aula.