MAT6681 REPRESENTAÇÕES DE GRUPOS (2021)

PROVA 2

Recomendações para a submissão da prova:

I. envie um único arquivo PDF contendo todos os exercícios, e com as páginas tendo tamanho A4 (ou qualquer tamanho próximo de A4),
II. ~~enumere as páginas, e no início de cada página, inclua seu NUSP. Na primeira página, coloque nome e email~~,
III. os exercícios podem ser feitos em qualquer ordem, e pode conter um ou mais exercícios por página.
IV. Permitido: arquivo gerado usando mesa digitalizadora, papel escrito a mão e escaneado, foto de papel escrito a mão, latex, etc...

1. Parte 1

Instruções. A Parte 1 tem peso 10%. Para essa parte da prova, siga os seguintes passos:
Passo 1. Resolva todos os itens *sem consulta*.
Passo 2. Confira suas respostas com alguma referência.
Passo 3. Se estiverem corretas, então finalize. Caso contrário, recomece, voltando para o passo 1.

(1) Enuncie o critério de solubilidade de Burnside.
(2) Enuncie o Teorema de Wedderburn-Malcev.

2. Parte 2

Instruções. Escolha 3 exercícios abaixo. Cada exercício tem peso 20%.

(1) Seja $\alpha \in \mathbb{C}$. Prove que α é um inteiro algébrico se, e somente se, existe um subanel de $\mathbb{C}$ com unidade e contendo α, e que é um $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado.
(2) Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ raízes da unidade, e seja $a = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$. Prove que, se a é um inteiro algébrico, então $a = 0$, ou $a = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.
(3) Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra de $\mathbb{F}$-dimensão finita. Sejam $V_1, \dots, V_r$ um conjunto completo de $\mathcal{A}$-módulos irredutíveis. Prove que $\mathbb{F}$ é uma splitting field para $\mathcal{A}$ se, e só se
$$\dim_{\mathbb{F}} (\mathcal{A}/J(\mathcal{A})) = \sum_{i=1}^{r} (\dim_{\mathbb{F}} V_i)^2 .$$
(4) Seja G um grupo finito e $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ uma extensão de corpos. Assuma que $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$ ou $\operatorname{char} \mathbb{F}$ não divide $|G|$. Seja W um $\mathbb{E}G$-módulo irredutível. Mostre que existem um $\mathbb{F}G$-módulo irredutível V e um $\mathbb{E}G$-módulo U de modo que $V^{\mathbb{E}} \cong W \oplus U$, como $\mathcal{A}^{\mathbb{E}}$-módulos.
(5) Seja $\mathcal{A} = M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(D_s)$, em que cada D_i é uma $\mathbb{F}$-álgebra de divisão. Sejam $\mathbb{E}_i = Z(D_i)$, $i = 1, 2, \dots, s$. Mostre que $\mathcal{A}$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra separável se, e só se, cada extensão de corpos $\mathbb{E}_i \supseteq \mathbb{F}$ é separável.

3. Parte 3

Instruções. Escolha 1 dentre os exercícios abaixo. Cada exercício tem peso 30%.

(1) Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas $\mathbb{F}$-álgebras de $\mathbb{F}$-dimensão finita. Assuma que $\mathcal{A}$ é semissimples e $\mathcal{B}$ é separável. Prove ou encontre um contra-exemplo:

   (a) $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{B}$ é semissimples,
   (b) $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{B}$ é separável se, e somente se, $\mathcal{A}$ é separável.
(2) Sejam $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ corpos de característica zero. Para cada um dos items, prove ou exiba um contra-exemplo:
   (a) todo $\mathbb{F}\mathcal{S}_n$-módulo irredutível é absolutamente irredutível,
   (b) se M é um $\mathbb{E}\mathcal{S}_n$-módulo de $\mathbb{E}$-dimensão finita (não necessariamente irredutível), então existe um $\mathbb{F}\mathcal{S}_n$-módulo M_0 tal que $M \cong M_0^{\mathbb{E}}$.