MAT6681 REPRESENTAÇÕES DE GRUPOS (2021)

PROVA 1

Recomendações para a submissão da prova:

I. envie um único arquivo PDF contendo todos os exercícios, e com as páginas tendo tamanho A4 (ou qualquer tamanho próximo de A4),
II. enumere as páginas, e no início de cada página, inclusa seu NUSP. Na primeira página, coloque nome e email,
III. os exercícios podem ser feitos em qualquer ordem, e pode conter um ou mais exercícios por página.
IV. Permitido: arquivo gerado usando mesa digitalizadora, papel escrito a mão e escaneado, foto de papel escrito a mão, latex, etc...

Parte 1

Instruções. A Parte 1 tem peso 10%. Para essa parte da prova, siga os seguintes passos:
Passo 1. Resolva todos os itens *sem consulta*.
Passo 2. Confira suas respostas com alguma referência.
Passo 3. Se não estiverem corretas, recomece, voltando para o passo 1.

(1) Enuncie o Teorema de Maschke, para representações de grupos finitos.
(2) Enuncie a classificação dos $\mathbb{Q}S_n$-módulos irredutíveis.
(3) Enuncie o Lema de Schur para representações de grupos finitos sobre $\mathbb{C}$-espaços vetoriais de dimensão finita.

Parte 2

Instruções. Escolha 3 dentre os exercícios abaixo. Cada exercício tem peso 20%. Permitido consulta.

(1) Seja G um grupo finito e $\rho_1, \rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V)$ duas representações, com $\dim V = 1$. Prove que ρ_1 e ρ_2 são isomorfas se e só se $\rho_1 = \rho_2$.
(2) Seja $\mathcal{R}$ um anel semissimples com 1. Dado um ideal à esquerda $I \subseteq \mathcal{R}$, descreva $\mathrm{Ann}^{\ell}_{\mathcal{R}}\left(\mathrm{Ann}^{r}_{\mathcal{R}}(I)\right)$.
(3) Seja G um grupo finito satisfazendo as condições seguintes:
   (a) existem subgrupos P_1 e P_2 de modo que $P_1 \cap P_2 = \{1\}$,
   (b) existe um homomorfismo de grupos $f : G \to \mathbb{Q}^{\times}$ (grupo multiplicativo de $\mathbb{Q}$) tal que $x \notin P_1P_2$ implica $f(u) \neq 1$ para algum $u \in P_1 \cap xP_2x^{-1}$.

   Prove que, se
$$e = \sum_{p \in P_1} \sum_{q \in P_2} f(q)pq \in \mathbb{Q}G,$$
   então $\mathbb{Q}Ge$ é um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{Q}G$.
(4) Sejam G um grupo finito, ρ uma representação irredutível de G (sobre um $\mathbb{C}$-espaço vetorial), χ o seu caracter, e $C = C(G) = \{z \in G \mid zg = gz, \forall g \in G\}$ o centro de G.
   (a) Para cada $z \in C$, prove que ρ_z é um múltiplo da identidade.
   (b) Prove que $\chi(1)^2 \leq |G|/|C|$.
(5) Seja $G = G_1 \times G_2$, produto direto de dois grupos. Seja ρ uma representação de G induzida por uma representação ρ_1 de G_1. Mostre que ρ é isomorfo a $\rho_1 \otimes \rho_{2,R}$, em que $\rho_{2,R}$ é a representação regular de G_2.

Parte 3

Instruções. Escolha 1 dentre os exercícios abaixo. Cada exercício tem peso 30%. Permitido consulta.

(1) Sejam p um primo, $G = C_p \times C_p$ o produto de dois grupos cíclicos de ordem p, e $\mathbb{F}$ um corpo de característica p, $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Descreva a álgebra de grupo $\mathbb{F}G$ (isto é, exiba um ideal nilpotente J tal que $\mathbb{F}G/J$ é semissimples; descreva as componentes simples de tal quociente (note que, em muitos casos, $J = 0$)).

Dica: (a) O que ocorre se $\operatorname{char} \mathbb{F} = p$?

(b) Assuma que $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq p$. Separe nos casos em que $\mathbb{F}$ contém uma p-ésima raiz primitiva de 1 ou não. Use o exercício (2) da Lista 1.

(c) Assuma que $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq p$, e que $\mathbb{F}$ não contém uma p-ésima raiz primitiva de 1. Prove que $\mathbb{F}C_p \cong \mathbb{F}[X]/(X^p - 1)$.

(d) Temos que $X^p - 1 = (X-1)\Phi_p$, em que Φ_p é irredutível sobre $\mathbb{F}$. Use o Teorema Chinês dos Restos para provar que $\mathbb{F}[X]/(X^p - 1) \cong \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}(\xi)$, em que $\xi \neq \xi^p = 1$ (Φ_p é o p-ésimo polinômio ciclotômico).

(e) Conclua a descrição de $\mathbb{F}G$ utilizando propriedades de produto tensorial, extensão de corpos, e o exercício (2) da Lista 1.

(2) Sejam G um grupo abeliano finito, $H \subseteq G$ um subgrupo, e χ_H um caracter irredutível de H. Escreva $\operatorname{Ind} \chi_H = \chi_1 + \cdots + \chi_s$, em que $\chi_1, \ldots, \chi_s$ são caracteres irredutíveis de G. Prove ou exiba um contra-exemplo:

(a) $s = [G : H]$.

(b) $\chi_i \neq \chi_j$, se $i \neq j$. Mais ainda,

$$\{\chi_1, \ldots, \chi_s\} = \{\chi \text{ caracter irredutível de } G \mid \chi|_H = \chi_H\}\,.$$

(em que $\chi|_H$ é a restrição de χ em H)