MAT6681 REPRESENTAÇÕES DE GRUPOS (2021)

LISTA 2

Para cada um dos items, resolva ou encontre um contra-exemplo.

(1) Seja $\alpha \in \mathbb{C}$. Prove que α é um inteiro algébrico se, e somente se, existe um subanel de $\mathbb{C}$ com unidade e contendo α, e que é um $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado.

(2) Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ raízes da unidade, e seja $a = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$. Prove que, se a é um inteiro algébrico, então $a = 0$, ou $a = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.

(3) Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra com unidade de $\mathbb{F}$-dimensão finita, e $\mathbb{E} \supseteq \mathbb{F}$ uma extensão de corpos. Denote por $J(\mathcal{A})$ o seu radical de Jacobson, e $\mathcal{A}^{\mathbb{E}} = \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E}$.
 (a) Prove que $J(\mathcal{A})^{\mathbb{E}} \subseteq J(\mathcal{A}^{\mathbb{E}})$.
 (b) Exiba $\mathcal{A}$ de modo que $J(\mathcal{A})^{\mathbb{E}} \neq J(\mathcal{A}^{\mathbb{E}})$.

(4) Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra de $\mathbb{F}$-dimensão finita. Sejam $V_1, \ldots, V_r$ um conjunto completo de $\mathcal{A}$-módulos irredutíveis. Prove que $\mathbb{F}$ é uma splitting field para $\mathcal{A}$ se, e só se

$$\dim_{\mathbb{F}} (\mathcal{A}/J(\mathcal{A})) = \sum_{i=1}^{r} (\dim_{\mathbb{F}} V_i)^2 .$$

(5) Sejam G um grupo finito e $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ uma extensão de corpos. Prove que $J(\mathbb{E}G) \cong J(\mathbb{F}G) \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E}$.

(6) Seja G um grupo finito e $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ uma extensão de corpos. Assuma que $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$ ou $\operatorname{char} \mathbb{F}$ não divide $|G|$. Seja W um $\mathbb{E}G$-módulo irredutível. Mostre que existem um $\mathbb{F}G$-módulo irredutível V e um $\mathbb{E}G$-módulo U de modo que $V^{\mathbb{E}} \cong W \oplus U$, como $\mathcal{A}^{\mathbb{E}}$-módulos.

(7) Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica $p > 0$, t transcendente sobre $\mathbb{F}$, $\mathcal{A} = \mathbb{F}(t)[X]/(X^{p^2} - t^p)$. Então $\mathcal{A}$ é uma $\mathbb{F}(t)$-álgebra.
 (a) Calcule $J(\mathcal{A})$ e $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$.
 (b) Mostre que não existe uma $\mathbb{F}(t)$-subálgebra $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} = \mathcal{S} + J(\mathcal{A})$.

Notações. 1. Diz-se que t é transcendente sobre $\mathbb{F}$ se $\mathbb{F}(t)$ é isomorfo ao corpo de frações do anel de polinômios em uma variável $\mathbb{F}[t]$.
2. Dados um corpo $\mathbb{L}$ e $f \in \mathbb{L}[X]$, denota-se (f) o ideal de $\mathbb{L}[X]$ gerado por f.

(8) Seja D uma $\mathbb{F}$-álgebra de divisão de $\mathbb{F}$-dimensão finita. Seja $\mathbb{E} = Z(D)$. Prove que:
 (a) Se $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ é uma extensão separável, então $D \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{L}$ é semissimples, para cada extensão $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{F}$.
 (b) Se $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ não é separável, então existe uma extensão de corpos $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{F}$ tal que $D \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{L}$ não é semissimples.

(9) Seja $\mathcal{A} = M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(D_s)$, em que cada D_i é uma $\mathbb{F}$-álgebra de divisão. Sejam $\mathbb{E}_i = Z(D_i)$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Mostre que $\mathcal{A}$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra separável se, e só se, cada extensão de corpos $\mathbb{E}_i \supseteq \mathbb{F}$ é separável.

(10) Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra tal que toda derivação generalizada é interna. Prove que $\mathcal{A}$ é separável.