MAT6681 REPRESENTAÇÕES DE GRUPOS (2021)

LISTA 1

Para cada um dos items, resolva ou encontre um contra-exemplo.

(1) Seja G um grupo finito e $\rho_1, \rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V)$ duas representações, com $\dim V = 1$. Prove que ρ_1 e ρ_2 são isomorfas se e só se $\rho_1 = \rho_2$.

(2) Seja G um grupo abeliano finito e $\mathbb{F}$ um corpo de característica zero. Lembre-se que o expoente do grupo G, denotado por $\exp G$, se existir, é o menor $m \in \mathbb{N}$ tal que $g^m = 1$, $\forall g \in G$. Prove que as seguintes condições são equivalentes:
  (a) $\mathbb{F}$ contém uma m-raiz primitiva da unidade, em que $m = \exp G$,
  (b) $G \cong \hat{G}$, em que $\hat{G} = \{f : G \to \mathbb{F}^\times \text{ homomorfismo}\}$,
  (c) como anéis, vale o isomorfismo $\mathbb{F}G \cong \underbrace{\mathbb{F} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}}_{|G| \text{ vezes}}$.

(3) Sejam $\mathcal{R}$ um anel e $e, f \in \mathcal{R}$ idempotentes. Prove que $\mathcal{R}e \cong \mathcal{R}f$ (como $\mathcal{R}$-módulos) se e só se existem $u, v \in \mathcal{R}$ de modo que $vu = e$ e $uv = f$.

(4) Sejam G um grupo finito e $\mathbb{F}$ um corpo arbitrário, com $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$. Seja $I \subseteq \mathbb{F}G$ um ideal bilateral.
  (a) Prove que I é uma $\mathbb{F}$-álgebra, e que existe um único homomorfismo sobrejetor de anéis $\pi : \mathbb{F}G \to I$, que também é um homomorfismo de $\mathbb{F}G$-módulos.
  (b) Assuma, neste e no próximo item, que G é abeliano finito e $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado com $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$. Prove que os ideais de $\mathbb{F}G$ podem ser parametrizados por subconjuntos de $\hat{G}$, isto é, exiba uma bijeção boa
$$\Theta : \{\text{subconjuntos de } \hat{G}\} \to \{\text{ideais bilaterais de } \mathbb{F}G\}.$$
  (c) Dado um ideal bilateral $I \subseteq \mathbb{F}G$, descreva, em termos de elementos de $\mathbb{F}G$ e de elementos de $\hat{G}$, um homomorfismo de anéis sobrejetor $\mathbb{F}G \to I$ que também é homomorfismo de $\mathbb{F}G$-módulos.

(5) Seja $\mathcal{R}$ um anel semissimples com 1. Prove que seu centro é uma soma direta finita de corpos.

(6) Seja $\mathcal{R}$ um anel semissimples com 1. Dado um ideal à esquerda $I \subseteq \mathcal{R}$, descreva $\mathrm{Ann}^{\ell}_{\mathcal{R}}(\mathrm{Ann}^{r}_{\mathcal{R}}(I))$.
Obs. Define-se $\mathrm{Ann}^{r}_{\mathcal{R}}(S) = \{x \in \mathcal{R} \mid sx = 0, \forall s \in S\}$, e $\mathrm{Ann}^{\ell}_{\mathcal{R}}(S) = \{x \in \mathcal{R} \mid xs = 0, \forall s \in S\}$

(7) Descreva um isomorfismo de álgebras $\mathbb{Q}\mathcal{S}_3 \to \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus M_2(\mathbb{Q})$.

(8) Seja G um grupo finito satisfazendo as condições seguintes:
  (a) existem subgrupos P_1 e P_2 de modo que $P_1 \cap P_2 = \{1\}$,
  (b) existe um homomorfismo de grupos $f : G \to \mathbb{Q}^\times$ (grupo multiplicativo de $\mathbb{Q}$) tal que $x \notin P_1P_2$ implica $f(u) \neq 1$ para algum $u \in P_1 \cap xP_2x^{-1}$.

Prove que, se
$$e = \sum_{p \in P_1} \sum_{q \in P_2} f(q)pq \in \mathbb{Q}G,$$
então $\mathbb{Q}Ge$ é um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{Q}G$.

(9) Sejam G um grupo finito, e $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ uma representação sobre o $\mathbb{C}$-espaço vetorial V de dimensão finita, e χ o seu caracter. Assuma que $\chi(g) = 0$, $\forall g \neq 1$. Prove que $\chi = n\chi_R$, para algum $n \in \mathbb{N}$, em que χ_R é o caracter da representação regular $\rho_R : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}G)$.

(10) Sejam G um grupo finito, ρ uma representação irredutível de G (sobre um $\mathbb{C}$-espaço vetorial), χ o seu caracter, e $C = C(G) = \{z \in G \mid zg = gz, \forall g \in G\}$ o centro de G.
(a) Para cada $z \in C$, prove que ρ_z é um múltiplo da identidade.
(b) Prove que $\chi(1)^2 \leq |G|/|C|$.

(11) Seja G um grupo e $H_1, H_2 \subseteq G$ subgrupos tais que $h_1h_2 = h_2h_1$, $\forall h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$. Sejam $H_0 = H_1 \cap H_2$ e $H = H_1H_2$ (note que H é subgrupo). Então $\mathbb{F}H_0 \subseteq \mathbb{F}H_i$, e portanto, $\mathbb{F}H_i$ é um $\mathbb{F}H_0$-módulo, via o produto em $\mathbb{F}H_i$. Prove que $\mathbb{F}H_1 \otimes_{\mathbb{F}H_0} \mathbb{F}H_2$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra, isomorfa a $\mathbb{F}H$.

(12) Sejam G um grupo finito e $H \subseteq G$ um subgrupo. Prove que cada representação irredutível de G (sobre um $\mathbb{C}$-espaço vetorial) está contida numa representação induzida por uma representação irredutível de H.

(13) Seja $G = G_1 \times G_2$, produto direto de dois grupos. Seja ρ uma representação de G induzida por uma representação ρ_1 de G_1. Mostre que ρ é isomorfo a $\rho_1 \otimes \rho_{2,R}$, em que $\rho_{2,R}$ é a representação regular de G_2.