Sejam N um (A,A)-bimódulo e $f: A\times A \to N$ bilinear, construímos $A \ltimes_f N$.

Temos que $A \ltimes_f N$ é ass $\Leftrightarrow$ f é 2-cociclo.

Note que $N \subseteq A \ltimes_f N$ é ideal e $N^2 = 0$. Temos $A \subseteq A \ltimes_f N$ é subconjunto, e A é subálgebra se e só se $f = 0$.

No caso de $f = 0$, então denomina-se $A \ltimes_f N$ de extensão cindida nula.

Lema $f - f' \in B^2(A,N) \Rightarrow A \ltimes_f N \cong A \ltimes_{f'} N$.

Fixe uma extensão $0 \to N \to U \xrightarrow{\phi} A \to 0$ tal que $N^2 = 0$. Seja $\psi: A \to U$ $\mathbb{F}$-linear tal que $\phi \circ \psi = id_A$.

Então, $\forall a, b \in A$,

$$\phi(\psi(ab) - \psi(a)\psi(b)) = \phi\psi(ab) - \phi(\psi a)\phi(\psi b)$$
$$= ab - ab = 0.$$

Portanto, $\psi(ab) - \psi(a)\psi(b) \in \operatorname{Ker}\phi = N$.

Obtemos assim, duas conclusões:

(i) $A \xrightarrow{\psi} \psi(A) \hookrightarrow U \to U/N$ é isomorfismo de álgebras.

(ii) Existe $f(a,b) \in N$ tal que
$$\psi(a)\psi(b) = \psi(ab) - f(a,b).$$
Temos que $f: A \times A \to N$ é bilinear. Além disso, como $\mathbb{F}$-esp. vet., $U = \psi(A) \oplus N$. O produto é dado por
$$(\psi(a_1)+n_1)(\psi(a_2)+n_2) = \psi(a_1)\psi(a_2) + \psi(a_1)n_2 + n_1\psi(a_2) + \underbrace{n_1 n_2}_{\in N^2=0}$$
$$= \psi(a_1 a_2) + f(a_1,a_2) + \psi(a_1)n_2 + n_1\psi(a_2).$$
Ainda, N é um (A,A)-bimódulo via
$$a_1 \cdot n \cdot a_2 = \psi(a_1)n\psi(a_2) \quad (\text{pois } N^2=0).$$
Conclui-se então que $U \cong A \times_f N$.

Corolário. Seja $0 \to N \to U \xrightarrow{\phi} A \to 0$ com $N^2=0$, e assuma que $Z(A,N)/B(A,N) = 0$. Então ϕ é cindida. $\square$

Teorema. Seja A uma $\mathbb{F}$-álg. sep. de dim. finita. Então
(i) Toda derivação generalizada é interna.
(ii) Todo 2-cociclo é um cobordo. $\square$

Teorema (Wedderburn-Malcev). Seja A uma $\mathbb{F}$-álgebra de dimensão finita tal que $A/J(A)$ é separável. Então:
(i) existe subálgebra $S \subseteq A$ com $S \cap J(A) = 0$ e $A = S + J(A)$.
(ii) Se S_1 e S_2 são como em (i), então existe $n \in J(A)$ tal que $S_1 = (1-n)^{-1}S(1-n)$.

Dem.: (ii) Se $J(A)^2 = 0$, então segue do corolário anterior.

Assuma então que $J(A)^2 \neq 0$, e seja $B = A/J(A)^2$.

Então $J(B) = J(A)/J(A)^2$, além disso

$$B/J(B) = \frac{A/J(A)}{J(A)/J(A)^2} \cong A/J(A) \text{ (é separável)}.$$

Daí, por indução, existe subálgebra $S_0 \subseteq B$ $(S_0 \cong A)$ tal que $B = S_0 + J(B)$. Denote $\pi : A \to A/J(A)^2$, e seja $S_0' = \pi^{-1}(S_0)$. Temos então que

$$A = S_0' + J(A).$$

Além disso, $J(A)^2 \subseteq S_0'$. Ainda, $J(A)^2$ é um ideal nilpotente de S_0', e então, $J(A)^2 \subseteq J(S_0')$. Por outro lado,

$$S_0'/J(A)^2 \cong S_0 \text{ é semissimples (e mais, é separável)}.$$

Daí $J(S_0') = J(A)^2$. Por indução, existe S $(S \cong A/J(A))$ tal que $S_0' = S + J(A)^2$. Daí, obtemos que

$$A = S + J(A). \qquad \square$$

Def.: Seja M um A-módulo. Uma extensão de M é um homomorfismo de A-módulos sobre $\phi : E \to M$.

Ou seja, temos sequência exata curta

$$0 \to \ker\phi \to E \xrightarrow{\phi} M \to 0$$

Dizemos que a extensão é cindida se existe um homomorfismo de A-módulos $\psi: M \to E$ tal que $\phi \circ \psi = id_M$.

Lema. A extensão $\phi: E \to M$ é cindida se e só se existe A-submódulo $M' \subseteq E$ tal que $E = \ker\phi \oplus M'$.

Dem.: exercício.

Fixe uma extensão $0 \to N \to E \xrightarrow{\phi} M \to 0$. Seja $T = Hom_{\mathbb{F}}(M, N)$. Então T admite uma estrutura de (A, A)-bimódulo. Para cada $\psi: M \to E$ $\mathbb{F}$-linear tal que $\phi \circ \psi = id_M$, defina $\overline{\psi}: A \to T$ da seguinte forma. $\forall a \in A$, $\forall m \in M$,

$$\overline{\psi}(a)(m) = \psi(am) - a\psi(m).$$

Note que

$$\phi\left(\psi(am) - a\psi(m)\right) = \phi\psi(am) - a\phi\psi(m)$$
$$= am - am = 0.$$

Daí

$$\psi(am) - a\psi(m) \in \ker\phi = N.$$

Segue que $\overline{\psi}$ está bem definido. Ainda, note que

$$\overline{\psi}(ab)(m) = \psi(abm) - ab\psi(m) = \psi(abm) - a\psi(bm) + a\psi(bm) - ab\psi(m)$$
$$= \overline{\psi}(a)(bm) + a\overline{\psi}(b)(m) = \left(\overline{\psi}(a)\cdot b + a\cdot\overline{\psi}(b)\right)(m),$$
$\forall m \in M$.

Daí $\overline{\Psi}(ab) = \overline{\Psi}(a)\cdot b + a\cdot\overline{\Psi}(b)$,
ou seja $\overline{\Psi}$ é uma derivação generalizada.

Proposição. $\phi : E \to M$ é cindida se e só se $\overline{\Psi}$ é uma derivação interna.

Dem.: Assuma que $\overline{\Psi}$ é der. interna. Então, existe $\tau \in T$ tal que, $\forall a \in A$,

$$\overline{\Psi}(a) = a\cdot\tau - \tau\cdot a.$$

Então, dado $m \in M$, temos que

$$a\tau(m) - \tau(am) = \overline{\Psi}(a)(m) = \Psi(am) - a\Psi(m)$$
$$\Rightarrow a\tau(m) + a\Psi(m) = \Psi(am) + \tau(am)$$
$$\Rightarrow a(\tau+\Psi)(m) = (\tau+\Psi)(am).$$

Daí $\tau+\Psi$ é um homomorfismo de A-módulos. Note que

$$\phi\circ(\tau+\Psi)(m) = \phi(\tau(m) + \Psi(m)) = \phi\underbrace{\tau(m)}_{\in N} + \underbrace{\phi\Psi(m)}_{m} = m.$$

Segue que $\phi : E \to M$ é cindida.

Reciprocamente, assuma que existe um homomorfismo de A-módulos $\varphi : M \to E$ tal que $\phi\circ\varphi = id_M$. Defina

$$\tau = \varphi - \Psi : M \to E.$$

Temos que

$\forall m \in M,\ \phi(\tau(m)) = \phi\varphi(m) - \phi\Psi(m) = m - m = 0.$

Assim, $\operatorname{Im}\tau \subseteq \operatorname{Ker}\phi = N$. Segue $\tau \in T$. Agora, dados $a \in A$ e $m \in M$,

$$
\begin{aligned}
(a\cdot\tau - \tau\cdot a)(m) &= a\tau(m) - \tau(am) \\
&= \cancel{a\varphi(m)} - a\Psi(m) - \cancel{\varphi(am)} + \Psi(am) \\
&= \Psi(am) - a\Psi(m) = \bar{\Psi}(a)(m).
\end{aligned}
$$

Obtemos que $a\cdot\tau - \tau\cdot a = \bar{\Psi}(a)$, ou seja, $\bar{\Psi}$ é uma derivação interna. $\square$

Corolário. Seja A uma $\mathbb{F}$-álgebra de dimensão finita tal que toda derivação generalizada de A é interna. Então A é semissimples.

Dem.: Mostremos que todo A-módulo é completamente redutível. Se $N \subseteq M$ são A-módulo, então

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0$$

cinde pela proposição anterior. $\square$

Obs.: Vale a conclusão mais forte: A é separável.