Teorema de Wedderburn-Malcev

Def. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra e T um $(\mathcal{A},\mathcal{A})$-bimódulo. Um mapa $\mathbb{F}$-linear $f: \mathcal{A} \to T$ é dito ser uma derivação generalizada se

$$f(ab) = a\cdot f(b) + f(a)\cdot b, \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Se $t \in T$, então $\delta_t : \mathcal{A} \to T$, definido por

$$\delta_t(a) = at - ta, \quad a \in \mathcal{A}$$

é uma derivação generalizada (verifique). Tais derivações são denominadas internas.

Def. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra. Uma extensão de $\mathcal{A}$ com núcleo N é um homomorfismo sobrejetor $\phi: \mathcal{U} \to \mathcal{A}$ com $\ker \phi = N$. Em outras palavras, uma extensão é uma sequência exata curta

$$0 \to N \to \mathcal{U} \to \mathcal{A} \to 0.$$

Dizemos que a extensão é cindida se existe subálgebra $S \subseteq \mathcal{U}$, com $S \cong \mathcal{A}$, tal que $\mathcal{U} = S + N$ (produto semi-direto, ou seja, $\mathcal{U} = S \oplus N$ como $\mathbb{F}$-espaço vetorial).

Exercício. Uma extensão $\phi: \mathcal{U} \to \mathcal{A}$ é cindida se e só se existe um homomorfismo de álgebras $\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{U}$ tal que $\phi \circ \varphi = id_{\mathcal{A}}$.

Sejam N um $(\mathcal{A},\mathcal{A})$-bimódulo, e $f: \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to N$ bilinear. Então temos estrutura de álgebra em $\mathcal{A}\oplus N$ via:

$$(a,n)\cdot(b,m) := (ab, am + nb + f(a,b)).$$

Denotamos o espaço $\mathcal{A}\oplus N$ com o tal produto por $\mathcal{A}\ltimes_f N$.

Note que, dados $a,b,c\in\mathcal{A}$, temos

$$(a,0)\cdot((b,0)\cdot(c,0)) = (a,0)\cdot(bc, f(b,c)) = (abc, af(b,c) + f(a,bc))$$

$$((a,0)\cdot(b,0))\cdot(c,0) = (ab, f(a,b))\cdot(c,0) = (abc, f(ab,c) + f(a,b)c).$$

Def.: Um **sistema de fatores** (ou **2-cociclo**) é um mapa bilinear $f: \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to N$ (N bimódulo) tal que:

$$af(b,c) + f(a,bc) = f(ab,c) + f(a,b)c, \quad \forall a,b,c\in\mathcal{A}.$$

Lema. $\mathcal{A}\ltimes_f N$ é associativa $\iff$ f é um 2-cociclo. $\square$

Denota-se $Z(\mathcal{A},N) = \{2\text{ cociclo } f: \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to N\}$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial.

Def.: Dizemos que $f\in Z(\mathcal{A},N)$ é um 2-cobordo se existe $F:\mathcal{A}\to N$ linear tal que

$$f(a,b) = aF(b) + F(a)b - F(ab), \quad \forall a,b\in\mathcal{A}.$$

Denota-se $B(\mathcal{A},N) = \{2\text{-cobordo } \mathcal{A}\to N\}$, que é um $\mathbb{F}$-subespaço vetorial de $Z(\mathcal{A},N)$.

Lema. Se $f - f' \in B(\mathcal{A}, N)$, então $\mathcal{A} \ltimes_f N \cong \mathcal{A} \ltimes_{f'} N$.

Dem.: Escreva $f(a,b) = f(a,b)' + aF(b) + F(a)b - F(ab)$, em que $F: \mathcal{A} \to N$ é $\mathbb{F}$-linear. Defina

$$\Psi: \mathcal{A} \ltimes_f N \longrightarrow \mathcal{A} \ltimes_{f'} N$$

via $\Psi(a,n) = (a, F(a) + n)$. Temos que Ψ é um isomorfismo de $\mathbb{F}$-espaços. Temos que

- $\Psi((a,n)\cdot(b,m)) = \Psi(ab, f(a,b) + am + nb) =$
$$= (ab, F(ab) + f(a,b) + am + nb).$$

- $\Psi(a,n)\cdot\Psi(b,m) = (a, F(a)+n)\cdot(b, F(b)+m) =$
$$= \left(ab, f'(a,b) + aF(b) + am + nb + F(a)b\right). \quad \square$$

Seja $\phi: \mathcal{U} \to \mathcal{A}$ uma extensão de $\mathcal{A}$ com núcleo N, e assuma que $N^2 = 0$. Escreva $\mathcal{U} = S \oplus N$ como $\mathbb{F}$-subespaços vetoriais. Temos que $\mathcal{A} \cong \mathcal{U}/N$. Assim existe um isomorfismo de $\mathbb{F}$-espaços $\Psi: \mathcal{A} \to S$.

Assim,

$$(\Psi(a_1) + N)(\Psi(a_2) + N) = \Psi(a_1)\Psi(a_2) + N.$$

Daí, dados $s_1 = \Psi(a_1)$, $s_2 = \Psi(a_2)$, temos que existe $f(a_1,a_2) \in N$ tal que

$$\Psi(a_1)\Psi(a_2) = \Psi(a_1 a_2) + f(a_1, a_2).$$

Além disso, $\mathcal{U} \cong \mathcal{A} \ltimes_f N$.

Corolário. Seja $\mathcal{U}$ uma extensão de $\mathcal{A}$ com núcleo N. Assuma que $N^2 = 0$ e $Z(\mathcal{A}, N)/B(\mathcal{A}, N) = 0$. Então a extensão é cindida. $\square$

Teorema. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra separável de $\mathbb{F}$-dimensão finita. Então:

(i) toda derivação generalizada é interna,

(ii) todo 2-cociclo de $\mathcal{A}$ é um cobordo.

Dem.: Existe uma base $\{a_1, \dots, a_n\}$, e $\{a_1', \dots, a_n'\} \subseteq \mathcal{A}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i' a_i = 1,$$

$\forall a \in \mathcal{A}$,

$$a_i a = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(a) a_j \quad (\lambda_{ij}(a) \in \mathbb{F}) \Rightarrow a a_j' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}(a) a_i'.$$

Seja $f : \mathcal{A} \to T$ uma derivação generalizada. Defina

$$t = \sum_{i=1}^{n} a_i' f(a_i).$$

Então,

$$at - ta = \sum_{i=1}^{n} \left(a a_i' f(a_i) - a_i' f(a_i) a \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(a a_i' f(a_i) - a_i' f(a_i a) + a_i' a_i f(a) \right)$$

$$= \sum_{i,j} \left(\lambda_{ji}(a) a_j f(a_i) - a_i f(\lambda_{ji}(a) a_i) \right) + f(a) = f(a).$$

Seja $h: A \times A \to N$ um 2-cociclo. Defina,
$F: A \to N$ via
$$F(a) = \sum_{i=1}^{n} h(a, a_i') a_i.$$

Então, vale que
$$a F(b) + F(a) b - F(ab) = h(a,b), \quad \forall a, b \in A \text{ (verifique!)}.$$

$\square$

Teorema. Seja A uma $\mathbb{F}$-álgebra de $\mathbb{F}$-dimensão finita, e assuma que $A/J(A)$ é separável. Então, existe uma $\mathbb{F}$-subálgebra $S \subseteq A$ (com $S \cong A/J(A)$) tal que
$$A = S + J(A).$$
Além disso, se $A = S_1 + J(A) = S_2 + J(A)$, então existe $n \in J(A)$ tal que $S_1 = (1-n)^{-1} S_2 (1-n)$.

Dem.: Se $J(A)^2 = 0$, então já vimos que vale. Assuma $J(A)^2 \neq 0$, e seja $B = A/J(A)^2$. Daí
$$J(B) = J(A)/J(A)^2, \quad \text{e} \quad B/J(B) = \frac{A/J(A)^2}{J(A)/J(A)^2} \cong A/J(A).$$
Por indução, existe $S_0 \subseteq B$ tal que
$$B = S_0 + J(B).$$

Defina $S_1 = \pi^{-1}(S_0)$. Temos que $J(S_1) = J(A)^2$.

Então, por indução, temos que $S_1 = S + J(A)^2$.

Assim,

$$A = S + J(A).$$

Por fim, assuma que $A = S + J(A) = S' + J(A)$.

Considere $\varphi : A \to A/J(A)$. Tome isomorfismos

$$\psi : A/J(A) \to S, \quad \psi' : A/J(A) \to S',$$

tais que $\varphi \circ \psi = id_{A/J(A)} = \varphi \circ \psi'$. Então, $J(A)$ é um $A/J(A)$-bimódulo via

$$a \cdot n \cdot a' = \psi(a) n \psi'(a').$$

Defina $f : A/J(A) \to J(A)$ via

$$f(a) = \psi(a) - \psi'(a).$$

Temos que $\varphi(f(a)) = \varphi\psi(a) - \varphi\psi'(a) = 0 \Rightarrow$

$$f(a) \in \operatorname{Ker} \varphi = J(A).$$

Ainda,

$$f(ab) = \psi(ab) - \psi'(ab) = \psi(a)\psi(b) - \psi'(a)\psi'(b)$$
$$= \psi(a) f(b) - f(a)\psi'(b)$$
$$= a \cdot f(b) - f(a) \cdot b.$$

Daí, existe $n \in J(A)$ tal que

$\forall a \in \mathcal{A}$,

$$\underbrace{a\cdot n - n\cdot a}_{\varphi(a)n - n\varphi'(a)} = f(a) = \varphi(a) - \varphi'(a)$$

Daí $\varphi(a)(1-n) = (1-n)\varphi'(a)$. Como $n \in J(\mathcal{A})$, segue $1-n$ é inversível, daí $\varphi(a) = (1-n)\varphi'(a)(1-n)^{-1}$.

$\square$