Álgebra de Frobenius

Def. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra e $f: \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathbb{F}$ bilinear.

(i) Dizemos que f é não-degenerada se $f(a,b)=0, \forall b\in\mathcal{A} \Rightarrow a=0$, e $f(a,b)=0, \forall a\in\mathcal{A} \Rightarrow b=0$.

(ii) Dizemos que f é associativa se
$$f(ab,c) = f(a,bc), \quad \forall a,b,c\in\mathcal{A}.$$

Def. Uma $\mathbb{F}$-álgebra $\mathcal{A}$ com 1 e $\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{A}<\infty$ é dita ser uma álgebra de Frobenius se existe $f:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathbb{F}$ bilinear, não-degenerada e associativa.

Obs. (i) $\mathcal{A}$ pode ser visto como um $\mathcal{A}$-módulo à esq. (denotado por ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}$), e como um $\mathcal{A}$-módulo à direita (denotado por $\mathcal{A}_{\mathcal{A}}$).

(ii) Seja $\mathcal{A}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A},\mathbb{F})$. Dados $a\in\mathcal{A}$, $a^*\in\mathcal{A}^*$, denote
$$a^*(a) =: \langle a, a^*\rangle.$$
Então $\mathcal{A}^*$ é um $\mathcal{A}$-módulo à esquerda via:
$$\langle b, a\cdot a^*\rangle := \langle ba, a^*\rangle, \quad b,a\in\mathcal{A},\ a^*\in\mathcal{A}^*.$$

Teorema. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra com 1 de $\mathbb{F}$-dim. finita. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\mathcal{A}$ é álgebra de Frobenius,

(ii) ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{A} \cong \mathcal{A}^*$, como $\mathcal{A}$-módulos à esquerda,

(iii) Existe $\lambda\in\mathcal{A}^*$ tal que $\mathrm{Ker}\,\lambda$ não contém ideais laterais de $\mathcal{A}$ não nulos.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii). Defina $\psi: a \in \mathcal{A} \mapsto a^* \in \mathcal{A}^*$ tal que

$$\langle b, a^* \rangle = f(b,a), \ \forall b \in \mathcal{A}.$$

Como f é bilinear, temos que ψ é linear e está bem definida. Além disso, $\psi(a) = 0 \Rightarrow f(b,a) = \langle b, 0 \rangle = 0$, $\forall b \in \mathcal{A} \Rightarrow$ (f é não-deg) $a = 0$. Assim, ψ é 1-1. Como $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A} = \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}^*$, ψ é iso. de $\mathbb{F}$-esp. vet.

Agora, temos que

$$\langle b, \psi(a'a) \rangle = f(b, a'a) = f(ba', a) = \langle ba', \psi(a) \rangle$$
$$= \langle b, a' \cdot \psi(a) \rangle, \ \forall a, a', b \in \mathcal{A}.$$

Assim, $\psi(a'a) = a' \cdot a$. Daí ψ é isomorfismo de $\mathcal{A}$-módulos.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Seja $\psi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ isomorfismo de $\mathcal{A}$-módulos. Defina $\lambda = \psi(1) \in \mathcal{A}^*$. Seja $a \in \operatorname{Ker} \lambda$ tal que $a\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker} \lambda$. Então, $\forall b \in \mathcal{A}$, temos que

$$0 = \langle ab, \lambda \rangle = \langle a, b \cdot \psi(1) \rangle = \langle a, \psi(b) \rangle, \ \forall b \in \mathcal{A}.$$

Isso implica que $a = 0$, pois ψ é iso. Assuma agora que $\mathcal{A}a \subseteq \operatorname{Ker} \lambda$. Então

$$0 = \langle ba, \lambda \rangle = \langle b, \psi(a) \rangle, \ \forall b \in \mathcal{A}.$$

Isso implica que $\psi(a) = 0 \Rightarrow a = 0$. Portanto, $\operatorname{Ker} \lambda$ não contém ideais laterais de $\mathcal{A}$ não nulos.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Seja λ como em (iii), e defina $f: \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to \mathbb{F}$ por

$$f(a,b) = \lambda(ab).$$

Então f é bilinear e associativa. Assuma que $\forall b\in\mathcal{A}$, $0 = f(a,b) = \lambda(ab) \Rightarrow \lambda(a\mathcal{A}) = 0 \Rightarrow a = 0$.

Da mesma forma, $f(a,b) = 0$, $\forall a\in\mathcal{A} \Rightarrow b = 0$.

Segue que f é não-degenerada. $\square$

Lema. (i) Se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são $\mathbb{F}$-álgebras de Frobenius, então $\mathcal{A}_1\oplus\mathcal{A}_2$ é $\mathbb{F}$-álgebra de Frobenius.

(ii) $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{F})$ é $\mathbb{F}$-álgebra de Frobenius.

(iii) Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra e $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{E}$ uma extensão de corpos. Então $\mathcal{A}$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra de Frobenius $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}^{\mathbb{E}}$ é uma $\mathbb{E}$-álgebra de Frobenius.

Dem.: (i) exercício.

(ii) Defina $tr: M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ dado pelo traço. Se $I\subseteq \operatorname{Ker} tr$ é um ideal à esquerda não nulo, então existe $J\subseteq I\subseteq \operatorname{Ker} tr$ ideal à esquerda minimal. Existe $e\in M_n(\mathbb{F})$ idempotente tal que $J = M_n(\mathbb{F})\cdot e$. Portanto, $e\in \operatorname{Ker} tr$. Mas $tr(e) = 1 \neq 0$, uma contradição. Daí tr satisfaz (iii) do teorema anterior.

(iii) Sabe-se que $(\mathcal{A}^{\mathbb{E}})^* \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{E}}(\mathcal{A}^{\mathbb{E}},\mathbb{E}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A},\mathbb{F})\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{E} \cong (\mathcal{A}^*)^{\mathbb{E}}$. Daí $\mathcal{A}$ é Frobenius $\Leftrightarrow \mathcal{A}\cong\mathcal{A}^* \Leftrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{E}}\cong(\mathcal{A}^{\mathbb{E}})^*\cong(\mathcal{A}^*)^{\mathbb{E}} \Leftrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{E}}$ é Frobenius. $\square$

Proposição. Seja G um grupo finito e $\mathbb{F}$ um corpo qualquer. Então $\mathbb{F}G$ é uma álgebra de Frobenius.

Dem.: Defina $tr: \sum_{g\in G} \alpha_g e_g \in \mathbb{F}G \mapsto \alpha_1 \in \mathbb{F}$. Defina $f: \mathbb{F}G \times \mathbb{F}G \to \mathbb{F}$ por $f(a,b) := tr(ab)$. Temos que f é bilinear e associativa. Assuma que $f\left(\sum_{g\in G} \alpha_g e_g, u\right) = 0$ $\forall u \in \mathbb{F}G$. Então

$$0 = f\left(\sum_{g\in G} \alpha_g e_g, e_{g^{-1}}\right) = \alpha_g, \quad \forall g \in G \Rightarrow \sum_{g\in G} \alpha_g e_g = 0.$$

Da mesma forma, $f(u,v) = 0$, $\forall u \in \mathbb{F}G \Rightarrow v = 0$. Assim f é não-degenerada. $\square$

Proposição. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra semissimples, $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A} < \infty$. Então $\mathcal{A}$ é $\mathbb{F}$-álgebra de Frobenius.

Dem.: Afirmação: Sejam $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ extensão finita de corpos e $\mathcal{B}$ uma $\mathbb{E}$-álgebra de Frobenius. Então $\mathcal{B}$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra de Frobenius.

Seja $\lambda: \mathcal{B} \to \mathbb{E}$ satisfazendo o item (iii) das equivalências. Seja $\mu: \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ $\mathbb{F}$-linear não nula. Defina $\lambda_0 = \mu\lambda: \mathcal{B} \to \mathbb{F}$. Seja $a \in \operatorname{Ker} \lambda_0$. Se $a\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker} \lambda \Rightarrow a = 0$. Assuma que existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $\lambda(ab) = \alpha \neq 0$. Seja $\beta \in \mathbb{E} \setminus \operatorname{Ker} \mu$.

Então
$$\lambda_0(ab\alpha^{-1}\beta) = \mu(\lambda(ab)\alpha^{-1}\beta) = \mu(\beta) \neq 0.$$
Portanto
$$\lambda_0(a\mathcal{A}) = 0 \Rightarrow \lambda(a\mathcal{A}) = 0 \Rightarrow a = 0.$$
Analogamente $\lambda_0(\mathcal{A}a) = 0 \Rightarrow a = 0$. Daí λ_0 satisfaz a equivalência (iii).

Escreva $\mathcal{A} = M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(D_s)$. Daí, basta mostrar que cada $M_{n_i}(D_i)$ é uma $\mathbb{F}$-álg. de Frobenius.

Mas $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A} < \infty \Rightarrow \dim_{\mathbb{F}} M_{n_i}(D_i) < \infty \Rightarrow \dim_{\mathbb{F}} Z(D_i) < \infty$.

Assim, pela afirmação, basta mostrar que $M_{n_i}(D_i)$ é uma $Z(D_i)$-álg. de Frobenius. Seja $\overline{\mathbb{F}}$ um fech. alg. de $\mathbb{F}$. Então $M_{n_i}(D_i)$ é $Z(D_i)$-álg. de Frobenius $\Leftrightarrow (M_{n_i}(D_i))^{\overline{\mathbb{F}}}$ é $\overline{\mathbb{F}}$-álg. de Frobenius (por (iii) do lema anterior). Mas,
$$M_{n_i}(D_i) \otimes_{Z(D_i)} \overline{\mathbb{F}} \cong M_{r_i}(\overline{\mathbb{F}}),$$
que é uma $\overline{\mathbb{F}}$-álg. de Frobenius (por (ii) do lema). $\square$

Fixe $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra de Frobenius com forma bilinear associativa não-degenerada f. Seja $\{a_1, \dots, a_n\}$ uma $\mathbb{F}$-base de $\mathcal{A}$. Então, existe $\{b_1^*, \dots, b_n^*\}$ $\mathbb{F}$-base de $\mathcal{A}^*$ tal que
$$\langle a_i, b_j^* \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Assim, existem $\{b_1, \dots, b_n\}$ base de A tal que

$$\langle a, b_j^* \rangle = f(a, b_j), \forall a \in A.$$

Portanto, $f(a_i, b_j) = \delta_{ij}$ $\forall i, j$.

Denomina-se $\{a_i\}$ e $\{b_j\}$ um par dual com respeito a f.

Exemplo. Seja $f(a,b) = tr(ab)$, $a, b \in \mathbb{F}G$. Se $\{e_{g_1}, \dots, e_{g_m}\}$ é a $\mathbb{F}$-base canônica de $\mathbb{F}G$, então a sua base dual com respeito a f é $\{e_{g_1^{-1}}, \dots, e_{g_m^{-1}}\}$.

Lema. Sejam $\{a_i\}$ e $\{b_j\}$ um par de bases duais com respeito a f. Dado $a \in A$, escreva

$$a_i a = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(a) a_j, \quad \lambda_{ij}(a) \in \mathbb{F}.$$

Então

$$a b_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}(a) b_i.$$

Dem.: Escreva $a b_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_i$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}$. Então,

$$f(a_\ell, ab_j) = f\left(a_\ell, \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f(a_\ell, b_i) = \alpha_{\ell j}$$

$$\parallel$$

$$f(a_\ell a, b_j) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_{\ell k}(a) a_k, b_j\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{\ell k}(a) f(a_k, b_j) = \lambda_{\ell j}(a).$$

Portanto, $\alpha_{\ell j} = \lambda_{\ell j}(a)$. $\square$

Obs. Se M é um $\mathcal{A}$-módulo à esquerda, então $\mathrm{End}_{\mathbb{F}} M$ admite uma estrutura de $(\mathcal{A},\mathcal{A})$-bimódulo:

$X \in M$, $a, a' \in \mathcal{A}$, $m \in M$, então

$$a \cdot X \cdot a' (m) = a \cdot \left(X (a' \cdot m) \right).$$

Proposição. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra de Frobenius com forma associativa não-degenerada f, e $\{a_i\}$ e $\{b_j\}$ um par de bases duais com respeito a f. Seja M um $\mathcal{A}$-módulo à esquerda. Dado $X \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}} M$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} b_i X a_i \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}} M.$$

Dem.: Dado $a \in \mathcal{A}$, temos que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i X a_i \right) \cdot a = \sum_{i=1}^{n} b_i X \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(a) a_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}(a) b_i \right) X a_j = \sum_{j=1}^{n} a b_j X a_j = a \sum_{j=1}^{n} b_j X a_j .$$

$\square$