Splitting field de uma álgebra central e simples

Def. Seja A uma $\mathbb{F}$-álgebra. Dizemos que A é central se $\mathbb{F} = Z(A)$.

Teorema. Sejam A uma $\mathbb{F}$-álgebra central e simples e B uma $\mathbb{F}$-álgebra simples com 1. Então $A \otimes_{\mathbb{F}} B$ é simples. Ainda mais, $Z(A \otimes_{\mathbb{F}} B) = 1 \otimes Z(B)$.

Dem.: Seja $0 \neq U \subseteq A \otimes_{\mathbb{F}} B$ um ideal bilateral. Para cada $0 \neq u \in U$, escreva $u = \sum_{i=1}^{s} a_i \otimes b_i$, com $b_1, \dots, b_s$ $\mathbb{F}$-l.i. Chame $s = l(u)$ se o s é minimal na representações. Fixe $0 \neq u \in U$ tal que $l(u)$ é mínimo, e escreva $u = \sum_{i=1}^{s} a_i \otimes b_i$. Como $a_1 \neq 0$, vale que $A a_1 A = A$. Assim, existem $a, a' \in A$ tal que $a a_1 a' = 1$.

Daí

$$U \ni u' = a \otimes 1 \cdot u \cdot a' \otimes 1 = \sum_{i=1}^{s} a a_i a' \otimes b_i = 1 \otimes b_1 + \sum_{i=2}^{s} a_i' \otimes b_i.$$

Para cada $a \in A$, temos que

$$U \ni [u', a \otimes 1] = \underbrace{[1, a]}_{0} \otimes b_1 + \sum_{i=2}^{s} [a_i', a] \otimes b_i = 0.$$

Como $b_2, \dots, b_s$ são $\mathbb{F}$-l.i., segue que $[a_i, a] = 0, \forall i$.
Como vale $\forall a \in \mathcal{A}$, segue que $a_i \in Z(\mathcal{A}) = \mathbb{F}$.

Segue que $s = 1$, pois
$$\mathcal{U} \ni u' = 1 \otimes b_1 + \sum_{i=2}^{s} a_i \otimes b_i = 1 \otimes b_1 + \sum_{i=2}^{s} 1 \otimes a_i b_i = 1 \otimes b.$$

Como $\mathcal{B}$ é simples, $\mathcal{B} b \mathcal{B} = \mathcal{B}$. Daí, existem $b', b'' \in \mathcal{B}$ tais que $b' b b'' = 1$. Assim
$$\mathcal{U} \ni 1 \otimes b' \cdot u' \cdot 1 \otimes b'' = 1 \otimes 1 \Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{B}.$$
Segue que $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{B}$ é simples.

Seja $z = \sum_{i=1}^{s} a_i \otimes b_i \in Z(\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{B})$ tal que $\{b_1, \dots, b_s\}$ é $\mathbb{F}$-l.i. Para cada $a \in \mathcal{A}$, temos
$$0 = \left[\sum_{i=1}^{s} a_i \otimes b_i, a \otimes 1\right] = \sum_{i} [a_i, a] \otimes b_i$$
$$\Rightarrow [a_i, a] = 0, \forall i, \forall a \in \mathcal{A} \Rightarrow a_i \in Z(\mathcal{A}) = \mathbb{F}.$$
Então, $z = 1 \otimes b$. Mas, $\forall b' \in \mathcal{B}$, vale que
$$0 = [z, 1 \otimes b'] = 1 \otimes [b, b'] \Rightarrow [b, b'] = 0 \Rightarrow b \in Z(\mathcal{B}).$$
$\square$

Corolário. (i) Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são central e simples, então $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{B}$ é central e simples.

(ii) Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra central e simples, e $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ uma extensão de corpos. Então $\mathcal{A}^{\mathbb{E}}$ é $\mathbb{E}$-álgebra central e simples.
$\square$

Corolário. Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra central e simples e $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ ext. de corpos. Então $\mathbb{E}$ é uma splitting field de $\mathcal{A}$ se e só se $\mathcal{A}^{\mathbb{E}} \cong M_n(\mathbb{E})$, para algum n. $\square$

Exemplo. Temos que $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$. Então $\mathbb{H}$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra de divisão. Daí $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ é uma $\mathbb{C}$-álgebra simples, e

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = 4.$$

Portanto, $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C})$.

Proposição. Sejam $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{D})$ uma $\mathbb{F}$-álgebra central e simples, e $\mathbb{E} \supseteq \mathbb{F}$. Então $\mathbb{E}$ é uma splitting field para $\mathcal{A} \iff \mathbb{E}$ é uma splitting field para $\mathbb{D}$.

Dem.: ($\Leftarrow$) Temos então $\mathbb{D} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E} \cong M_r(\mathbb{E})$. Assim,

$$\mathcal{A}^{\mathbb{E}} \cong M_n(\mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{D} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E} \cong M_n(\mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} M_r(\mathbb{E}) \cong M_{nr}(\mathbb{E}).$$

Daí $\mathbb{E}$ é splitting field para $\mathcal{A}$.

($\Rightarrow$) Por um lado, $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E} \cong M_s(\mathbb{E})$, e $\mathbb{D} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E}$ é $\mathbb{E}$-central e simples. Assim, $\mathbb{D} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E} \cong M_r(\mathbb{D}')$, para algum $\mathbb{D}'$ $\mathbb{E}$-álg. de divisão. Daí

$$M_s(\mathbb{E}) \cong \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E} \cong M_n(\mathbb{F}) \otimes \mathbb{D} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E} \cong M_{nr}(\mathbb{D}').$$

Da unicidade do Teorema de Wedderburn-Artin, segue que $\mathbb{D}' \cong \mathbb{E}$.

$\square$

Def. Seja $\mathbb{D}$ um anel de divisão. Dizemos que $\mathbb{E}\subseteq\mathbb{D}$ é subcorpo maximal se para todo corpo $\mathbb{L}$, com $\mathbb{E}\subseteq\mathbb{L}\subseteq\mathbb{D}$, temos que $\mathbb{L}=\mathbb{E}$.

Exemplo. $\mathbb{R}=Z(\mathbb{H})$, e dado qualquer $a\in\mathbb{H}$, temos que $\mathbb{R}(a)$ é corpo. Se $a\notin\mathbb{R}$, então $\mathbb{R}(a)\cong\mathbb{C}$.

Lema. Seja $\mathbb{E}\subseteq\mathbb{D}$ um corpo. Então $\mathbb{E}$ é subcorpo maximal se e só se $\mathbb{E}=C_{\mathbb{D}}(\mathbb{E}):=\{x\in\mathbb{D}\mid x\alpha=\alpha x, \forall\alpha\in\mathbb{E}\}$.

Dem.: Seja $\mathbb{E}\subseteq\mathbb{D}$ corpo e $a\in C_{\mathbb{D}}(\mathbb{E})$. Então $\mathbb{E}(a)$ é corpo. Além disso, se $\mathbb{E}\subseteq\mathbb{L}\subseteq\mathbb{D}$ e $\mathbb{L}$ é corpo, então $\mathbb{L}\subseteq C_{\mathbb{D}}(\mathbb{E})$. O resultado segue. $\square$

Teorema. Seja $\mathbb{D}$ um anel de divisão, $\mathbb{F}=Z(\mathbb{D})$ e $\mathbb{E}\subseteq\mathbb{D}$ um subcorpo maximal. Então $\mathbb{D}$ é um $\mathbb{D}\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{E}$-módulo fiel e irredutível. Ainda mais,

$$\mathrm{End}_{\mathbb{D}\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{E}}\mathbb{D}\cong\mathbb{E}.$$

Dem.: Temos que $\mathbb{D}$ é um $\mathbb{D}\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{E}$-módulo via

$$(d\otimes\alpha)\cdot e=de\alpha,\quad e\in\mathbb{D},\quad d\otimes\alpha\in\mathbb{D}\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{E}.$$

Como $\mathbb{D}\otimes 1\cdot d=\mathbb{D}$, $\forall d\neq 0$, segue $\mathbb{D}$ é um módulo irredutível. Como $\mathbb{D}\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{E}$ é simples, segue que $\mathbb{D}$ é um módulo fiel.

Seja $\psi \in \mathrm{End}_{D\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{E}} D$. Seja $d = \psi(1) \in D$. Então, para cada $e \in D$, temos

$$\psi(e) = \psi(e\otimes 1 \cdot 1) = e\otimes 1 \cdot \psi(1) = e\otimes 1 \cdot d = ed.$$

Daí ψ é a multiplicação à direita por d. Para cada $\alpha \in \mathbb{E}$, temos que

$$\alpha d = \psi(\alpha) = \psi(1\otimes\alpha \cdot 1) = 1\otimes\alpha \cdot \psi(1) = 1\otimes\alpha \cdot d = d\alpha.$$

Segue que $d \in C_D(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$. Portanto $\mathrm{End}_{D\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{E}} D \cong \mathbb{E}$. $\square$

Corolário. Sejam D anel de divisão, $\mathbb{F} = Z(D)$ e $\mathbb{E} \subseteq D$ subcorpo maximal. Assuma que $\dim_{\mathbb{F}} D < \infty$. Então $D \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E} \cong M_n(\mathbb{E})$, em que $n = \dim_{\mathbb{E}} D = \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{E}$.

Dem.: Temos que

$$(\dim_{\mathbb{E}} D)^2 = \dim_{\mathbb{E}}(M_n(\mathbb{E})) = \dim_{\mathbb{E}}(D\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{E}) = \dim_{\mathbb{F}} D = \dim_{\mathbb{E}} D \cdot \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{E}$$

Daí $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{E} = \dim_{\mathbb{E}} D$, e $\dim_{\mathbb{F}} D = (\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{E})^2$. $\square$

Proposição. Sejam D anel de divisão, $\mathbb{F} = Z(D)$, e assuma que $\dim_{\mathbb{F}} D < \infty$. Seja $\mathbb{E} \supseteq \mathbb{F}$ uma ext. de corpos finita, e assuma que $\mathbb{E}$ é uma splitting field para D. Então

$$\sqrt{\dim_{\mathbb{F}} D} \mid \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{E}.$$

Dem.: Temos que $D \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E} \cong M_r(\mathbb{E})$.

Daí, vale que

- $\underbrace{\dim_{\mathbb{E}} D \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E}}_{\dim_{\mathbb{F}} D} = \dim_{\mathbb{E}} M_r(\mathbb{E}) = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\dim_{\mathbb{F}} D}$.

- $\dim_D D \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E} = \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{E}$.

Por outro lado, $D \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E} \cong M_r(\mathbb{E})$ é soma de r cópias de ideais minimais à esquerda. Então

$$\dim_D M_r(\mathbb{E}) = r \cdot \dim_D I.$$

Daí $\sqrt{\dim_{\mathbb{F}} D} = r$ divide $\dim_D M_r(\mathbb{E}) = \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{E}$. $\square$