

Isomorfismo de módulos e extensão de escalares

Lema. Sejam A uma F -álgebra, V, W A -módulos e $F \subseteq E$ extensão de corpos. Então

$$\text{Hom}_{A^E}(V^E, W^E) \cong \text{Hom}_A(V, W) \otimes_F E.$$

Dem.: Temos que $\text{Hom}_{A^E}(V^E, W^E) \cong \text{Hom}_F(V^E, W^E)$.

Dados $\alpha \in E$ e $f \in \text{Hom}_A(V, W)$, temos que

$$\begin{aligned} f \otimes \alpha \left(\sum_i a_i \otimes \beta_i \right) \left(\sum_j v_j \otimes \gamma_j \right) &= \sum_{i,j} f(a_i v_j) \otimes \alpha \beta_i \gamma_j \\ &= \sum_{i,j} a_i f(v_j) \otimes \alpha \beta_i \gamma_j = \left(\sum_i a_i \otimes \beta_i \right) \left(\sum_j f(v_j) \otimes \alpha \gamma_j \right) \\ &= \left(\sum_i \alpha_i \otimes \beta_i \right) f \otimes \alpha \left(\sum_j v_j \otimes \gamma_j \right). \end{aligned}$$

Daí $f \otimes \alpha \in \text{Hom}_{A^E}(V^E, W^E)$.

Reciprocamente, seja $f \in \text{Hom}_{A^E}(V^E, W^E) \subseteq \text{Hom}_F(V^E, W^E) \cong \text{Hom}_F(V, W) \otimes_F E$. Daí $f = f_1 \otimes \alpha_1 + \dots + f_s \otimes \alpha_s$, com $f_i \in \text{Hom}_F(V, W)$. Podemos assumir que $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ são F -linearm. independentes. Dados $a \in A$ e $v \in V$, temos

$$0 = f(a \cdot v \otimes 1) - a f(v \otimes 1) = \sum_{i=1}^s (f_i(av) - a f_i(v)) \otimes \alpha_i.$$

Assim $f_i(av) - a f_i(v) = 0$, $\forall i$. Ou seja, $f_i \in \text{Hom}_A(V, W)$. $\square$

Teorema. Sejam V e W A -módulos de F -dimensão finita.
 Seja $F \subseteq E$ uma extensão de corpos. Se $V^E \cong W^E$ como A^E -módulos, então $V \cong W$ como A -módulos.

Dem.: Seja $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ uma F -base de $\text{Hom}_A(V, W)$.

Dai $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ é uma E -base de $\text{Hom}_{A^E}(V^E, W^E)$.

Considere

$$f(X_1, \dots, X_n) = \det(X_1 \psi_1 + \dots + X_n \psi_n) \in F[X_1, \dots, X_n].$$

Denote por $\bar{\psi} : V^E \rightarrow W^E$ um isomorfismo. Então

$$\bar{\psi} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i \quad \text{Assim, } 0 \neq \det \bar{\psi} = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Portanto, $f \neq 0$. Temos que f é um polinômio de grau

$n = \dim_F V$. Se $|F| > n$, então existem $\beta_1, \dots, \beta_n \in F$ tais

que $f(\beta_1, \dots, \beta_n) \neq 0$. Portanto $\sum_{i=1}^n \beta_i \psi_i : V \rightarrow W$ é um

isomorfismo de A -módulos.

Assuma que $|F| \leq n$. Seja $L \supseteq F$ uma extensão de corpos finita com $|L| > n$. Dai $V^L \cong W^L$ como A^L -mod.

Segue que $V^L \cong W^L$ como A -módulos. Como

$$\dim L = s < \infty, \text{ temos que } L = \bigoplus_{i=1}^s F. \text{ Portanto,}$$

$$\bigoplus_{i=1}^s V^F \cong V \otimes_F \left(\bigoplus_{i=1}^s F \right) \cong V^L \cong W^L \cong \bigoplus_{i=1}^s W.$$

Uma decomposição de V como soma de A -módulos indecomponíveis implica numa decomposição de $\bigoplus V$ em A -módulos indecomponíveis.

Da mesma forma, uma decomposição de W implica numa decomp. de $\bigoplus W$. Do Teorema de Krull-Schmidt, as decomposições de V^k e W^k são a mesma. Portanto, a decomposição de V e W devem coincidir. Assim, $V \cong W$ como A -módulos. $\square$

Corolário. Seja F uma splitting field da F -álgebra A , $\dim_F A < \infty$, e $E \supseteq F$ uma extensão de corpos. Se $V_1, \dots, V_m$ é um conjunto completo de A -módulos irreduzíveis, então $V_1^E, \dots, V_m^E$ é um conjunto completo de A^E -módulos irreduzíveis. $\square$

Teorema de Krull - Schmidt

Def. Seja M um R -módulo. Dizemos que M é indecomponível se $M = M_1 \oplus M_2 \Rightarrow M_1 = 0$ ou $M_2 = 0$.

Lema. Se M é um R -módulo artiniano, então M pode ser escrito como soma direta de R -módulos indecomponíveis.

Dem.: Seja $S = \{N \subseteq M \mid N \text{ não é soma direta de } R\text{-md. indecomp.}\}$. Se $S \neq \emptyset$, como M é artiniano, existe $N \in S$ minimal. N não é indecomponível, e então, $N = N_1 \oplus N_2$ (com $N_i \neq 0$). Como N é minimal, $N_1, N_2 \notin S$. Portanto, N_1 e N_2 são soma direta de módulos indecomp. Portanto, $N \notin S$, uma contradição. Assim, $S = \emptyset$. $\square$

Lema. Sejam M um R -módulo e $\varphi \in \text{End}_R M$.

- (i) Se M é noetheriano e φ é sobre, então φ é automorfismo.
- (ii) Se M é artiniano e φ é injetora, então φ é automorfismo.
- (iii) (Lema de Fitting). Se M é artiniano e noetheriano, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M = \text{Ker } \varphi^n \oplus \varphi^n(M)$.

Dem (exercício)

- (iii) (ideia) Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi^n(M) = \varphi^{n+s}(M), \forall s \geq 0$.
Dai $\varphi^n|_{\varphi^n(M)}$ é automorfismo. Dai $M = \text{Ker } \varphi^n \oplus \varphi^n(M)$. $\square$

Lema. Sejam M um R -módulo artiniano, noetheriano e indecomponível, e $\varphi \in \text{End}_R M$. Então ou φ é nilpotente, ou φ é automorfismo.

Dem.: Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $M = \text{Ker } \varphi^n \oplus \varphi^n(M)$. Como M é indecomp $\Rightarrow \text{Ker } \varphi^n = 0$ ou $\varphi^n(M) = 0$. A segunda implica que φ é nilpotente. A primeira implica que φ^n é automorfismo $\Rightarrow \varphi$ é automorfismo. $\square$

Lema. Seja M um R -mód. artiniano, noetheriano e indecomp. Sejam $\psi_1, \dots, \psi_s \in \text{End}_R M$ tal que $\psi_1 + \dots + \psi_s$ é automorfismo. Então algum ψ_i é automorfismo.

Dem.: Basta assumir que $s=2$. Se $\psi_1 + \psi_2 = \psi$ é automorfismo, então $\psi^{-1}\psi_1 + \psi^{-1}\psi_2 = \text{Id}_M$. Daí, podemos assumir que $\psi_1 + \psi_2 = \text{Id}_M$. Se ψ_1 é automorfismo, então acabou. Caso contrário, do lema anterior, ψ_1 é nilpotente. Assim, $\psi_2 = \text{Id}_M - \psi_1$ é automorfismo (pois sua inversa é $\text{Id}_M + \psi_1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_1^{n-1}$, em que $\psi_1^n = 0$). $\square$

Lema. Sejam $M_1 \times M_2$ artiniano e $\psi: M_1 \times M_2 \rightarrow N_1 \times N_2$ isomorfismo. Sejam $i: M_1 \hookrightarrow M$, $\pi: N_1 \times N_2 \rightarrow N_1$, a inclusão e a projeção canônicas.

Assuma que $M_1 \xrightarrow{i} M_1 \times M_2 \xrightarrow{\psi} N_1 \times N_2 \xrightarrow{\pi} N_1$
 e' isomorfismo. Entao $M_2 \cong N_2$. $\psi_1 = \pi \circ \psi \circ i$

Dem.: Assuma que $\psi(M_1) \subseteq N_1$. Como $\pi \circ \psi \circ i$ e'
 iso, segue que $\psi(M_1) = N_1$. Entao
 $M_2 \cong M_1 \times M_2 / M_1 \cong \psi(M_1 \times M_2) / \psi(M_1) \cong N_1 \times N_2 / N_1 \cong N_2$.

No caso geral, escreva $\psi(a,b) = (\psi_1(a) + \psi'_1(b), \psi_2(a) + \psi'_2(b))$.

Defina $\eta: M_1 \times M_2 \rightarrow N_1 \times N_2$ via

$$\eta(a,b) = (\psi_1(a) + \psi'_1(b), \psi_2(b) - \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ \psi'_1(b)).$$

Temos que $\eta(M_1) \subseteq N_1$. Alem disso, $\pi \circ \eta \circ i =$
 $= \pi \circ \psi \circ i: M_1 \rightarrow N_1$ e' isomorfismo.

Seja $(a,b) \in \text{Ker } \eta$. Entao $(0,0) = \eta(a,b)$, e dai

$$0 = \psi_2(b) - \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ \psi'_1(b).$$

Alem disso,

$$\psi(-\psi_1^{-1} \circ \psi'_1(b), b) = (-\psi'_1(b) + \psi'_1(b), -\psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ \psi'_1(b) + \psi_2(b)) \\ = (0, 0).$$

Assim $(-\psi_1^{-1} \circ \psi'_1(b), b) \in \text{Ker } \psi = 0$. Dai $b = 0$.

Assim $0 = \eta(a, 0) = (\psi_1(a), 0)$. Entao $a \in \text{Ker } \psi_1 = 0$.

Segue que $(a, b) = 0$. Como $M_1 \times M_2$ é artiniano e $M_1 \times M_2 \cong N_1 \times N_2$, segue que η é isomorfismo. Assim, segue da primeira parte, que $M_2 \cong N_2$. $\square$

Teorema (Krull-Schmidt). Sejam M e M' R -módulos artinianos e noetherianos. Sejam $M = \bigoplus_{i=1}^m M_i$ e $M' = \bigoplus_{j=1}^{m'} M'_j$ a decomposição em R -módulos indecomponíveis. Se $M \cong M'$, então $m = m'$, e a menos de uma permutação $M_i \cong M'_i$, $\forall i = 1, \dots, m$.

Dem.: Denote $i_j: M_j \rightarrow M$, $\pi_j: M \rightarrow M_j$, $i'_j: M'_j \hookrightarrow M'$, $\pi'_j: M' \rightarrow M'_j$. Seja $\psi: M \rightarrow M'$ iso.

Defina

$$\alpha_j = \pi'_j \circ \psi \circ i_j: M_j \rightarrow M'_j, \quad \beta_j = \pi_j \circ \psi^{-1} \circ i'_j: M'_j \rightarrow M_j.$$

Então $\sum_{j=1}^m \beta_j \circ \alpha_j \in \text{End}_R M_1$. Ainda, se $a \in M_1$

$$\begin{aligned} \sum_j \beta_j \circ \alpha_j(a) &= \sum_j \pi_1 \circ \psi^{-1} \circ i'_j \circ \pi'_j \circ \psi \circ i_1(a) = \pi_1 \circ \psi^{-1} \left(\sum_j i'_j \circ \pi'_j \right) \circ \psi \circ i_1(a) \\ &= \pi_1 \circ \psi^{-1} \circ \text{id}_{M'} \circ \psi \circ i_1(a) = a. \end{aligned}$$

Assim $\sum_j \beta_j \circ \alpha_j$ é auto. Portanto, existe $\beta_j \circ \alpha_j$ que é auto. Se $(\alpha_j \circ \beta_j)^n = 0$, então $(\beta_j \circ \alpha_j)^{n+1} = \beta_j (\alpha_j \circ \beta_j)^n \alpha_j = 0$, uma contradição.

Portanto, como M_j é indecomponível art. e noeth., e $\alpha_j \beta_j \in \text{End}_{\mathbb{R}} M_j$, segue que $\alpha_j \beta_j$ é automorfismo. Assim, α_j e β_j são isomorfismos. Renomeando índices, assumamos que $j=1$. Então, temos que

$$\psi: M_1 \oplus \left(\bigoplus_{i=2}^m M_i \right) \xrightarrow{\sim} M'_1 \oplus \left(\bigoplus_{j=2}^{m'} M'_j \right)$$

tal que

$$M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{\psi} N \xrightarrow{\pi_1} M'_1$$

é isomorfismo. Portanto, do lema anterior, $\bigoplus_{i=2}^m M_i \cong \bigoplus_{j=2}^{m'} M'_j$. $\square$

O resultado segue por indução.