Módulos absolutamente irredutíveis

Sejam $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ uma extensão de corpos, $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra e V um $\mathcal{A}$-módulo. Então $\mathcal{A}^{\mathbb{E}} := \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E}$ é uma $\mathbb{E}$-álgebra, e $V^{\mathbb{E}} := V \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E}$ é um $\mathcal{A}^{\mathbb{E}}$-módulo via

$$\left(\sum_i a_i \otimes \alpha_i\right)\left(\sum_j v_j \otimes \beta_j\right) = \sum_{i,j} a_i v_j \otimes \alpha_i \beta_j.$$

Questões:

1. Se V é $\mathcal{A}$-mod. irredutível $\overset{(?)}{\Longrightarrow}$ $V^{\mathbb{E}}$ é $\mathcal{A}^{\mathbb{E}}$-mod. irredutível?
2. Se $V^{\mathbb{E}} \cong W^{\mathbb{E}}$ como $\mathcal{A}^{\mathbb{E}}$-mod $\overset{(?)}{\Longrightarrow}$ $V \cong W$ como $\mathcal{A}$-mod?
3. $\mathcal{A}$ semissimples $\overset{(?)}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{A}^{\mathbb{E}}$ é semissimples?

Exemplos.

1. Seja $\mathbb{H} = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{1, i, j, k\}$, e defina

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j,$$

e 1 é unidade (i.e., $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, $\forall x \in \{i, j, k, 1\}$).

Então $\mathbb{H}$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra associativa de divisão.

Além disso, $\mathbb{H} \not\cong M_2(\mathbb{R})$. Porém,

$$\underbrace{\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C})}_{\text{(verifique diretamente, ou espere mais ferramentas)}} \cong M_2(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

2. Seja V um $\mathbb{H}$-módulo irredutível. Então V é um $\mathbb{H}$-esp. vet. de $\mathbb{H}$-dimensão 1. Então $V^{\mathbb{C}}$ é um $\mathbb{H}^{\mathbb{C}} \cong M_2(\mathbb{C})$-módulo. Ainda,

$$\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = 4.$$

Porém, cada $M_2(\mathbb{C})$-módulo irredutível é isomorfo a matrizes na primeira linha. Assim, um tal $M_2(\mathbb{C})$-mód. irredutível possui $\mathbb{C}$-dimensão 2. Portanto, $V^{\mathbb{C}}$ não pode ser um $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$-módulo irredutível.

3. Seja $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ como uma $\mathbb{R}$-álgebra. Então $\mathcal{A}$ é simples. Ainda, $\mathcal{A}^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Daí $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ não é simples (porém, $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ é semissimples).

Def. (1) Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra e V um $\mathcal{A}$-módulo irredutível. Dizemos que V é *absolutamente irredutível* se, para cada extensão de corpos $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$, $V^{\mathbb{E}}$ é um $\mathcal{A}^{\mathbb{E}}$-módulo irredutível.

(2) Dizemos que um corpo $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{F}$ é um *splitting field* de $\mathcal{A}$ se todo $\mathcal{A}^{\mathbb{L}}$-módulo irredutível é absolutamente irredutível.

(3) Seja G um grupo finito. Um corpo $\mathbb{L}$ é um splitting field de G se todo $\mathbb{L}G$-módulo irredutível é absolutamente irredutível.

Teorema Seja A uma $\mathbb{F}$-álgebra e V um A-módulo de dimensão finita e irredutível. Então V é absolutamente irredutível se, e somente se,

$$\mathrm{End}_A V \cong \mathbb{F}.$$

Dem.: Pelo Lema de Schur, $\mathrm{End}_A V \cong D$ é um anel de divisão. Além disso, como $\dim_{\mathbb{F}} V < \infty$, $\dim_{\mathbb{F}} D < \infty$. Assim, pelo Teorema da Densidade, existe um hom. de anéis sobrejetor

$$A \longrightarrow \mathrm{End}_D V \cong M_n(D), \quad n = \dim_D V.$$

Assuma que $D \cong \mathbb{F}$. Seja $\mathbb{E} \supseteq \mathbb{F}$. Então $V^{\mathbb{E}}$ é um $M_n(\mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E} \cong M_n(\mathbb{E})$-módulo, e

$$\dim_{\mathbb{E}} V^{\mathbb{E}} = \dim_{\mathbb{F}} V = n.$$

Portanto, $V^{\mathbb{E}}$ é um $M_n(\mathbb{E})$-módulo irredutível. Assim, $V^{\mathbb{E}}$ é $A^{\mathbb{E}}$-módulo irredutível.

Reciprocamente, assuma que V é abs. irredutível, e seja $\overline{\mathbb{F}}$ um fecho algébrico de $\mathbb{F}$.

Daí

$$\mathcal{A}^{\mathbb{F}} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{F}} V^{\mathbb{F}} \simeq M_s(\mathbb{F}), \quad s = \dim_{\mathbb{F}} V^{\mathbb{F}}.$$

Temos que

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{End}_{\mathbb{F}} V^{\mathbb{F}}}_{(\dim_{\mathbb{F}} V^{\mathbb{F}})^2} = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{End}_D V = (\dim_D V)^2 \cdot \dim_{\mathbb{F}} D$$

$$(\dim_{\mathbb{F}} V^{\mathbb{F}})^2 = (\dim_{\mathbb{F}} V)^2 = (\dim_D V \cdot \dim_{\mathbb{F}} D)^2$$

Assim, obtemos que $\dim_{\mathbb{F}} D = 1$. Portanto, $D = \mathbb{F}$. $\square$

Corolário.

(i) $\mathbb{F}$ é um splitting field de G se, e somente se,

$$\mathbb{F}G \simeq M_{n_1}(\mathbb{F}) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(\mathbb{F}).$$

(ii) $\mathbb{E}$ é um splitting field de uma $\mathbb{F}$-álgebra $\mathcal{A}$ de dimensão finita se, e somente se,

$$\mathcal{A}^{\mathbb{E}} / J(\mathcal{A}^{\mathbb{E}}) \simeq M_{n_1}(\mathbb{E}) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(\mathbb{E}). \quad \square$$

Lema. Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra, $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A} < \infty$, e $\mathbb{E} \supseteq \mathbb{F}$.

(i) $J(\mathcal{A})^{\mathbb{E}} = J(\mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E} \subseteq J(\mathcal{A}^{\mathbb{E}})$

(ii) Se $I \subseteq \mathcal{A}$ é ideal, então $(\mathcal{A}/I)^{\mathbb{E}} \simeq \mathcal{A}^{\mathbb{E}} / I^{\mathbb{E}}$.

Dem.: (exercício).

Teorema. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra, e assuma que $\mathbb{F}$ é uma splitting field de $\mathcal{A}$. Seja $\mathbb{E} \supseteq \mathbb{F}$ uma extensão de corpos. Então $\mathbb{E}$ é uma splitting field de $\mathcal{A}$.

Dem.: Temos que

$$\mathcal{A}/J(\mathcal{A}) \cong M_{n_1}(\mathbb{F}) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(\mathbb{F}).$$

Assim,

$$M_{n_1}(\mathbb{E}) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(\mathbb{E}) \cong \left(\mathcal{A}/J(\mathcal{A})\right)^{\mathbb{E}} \cong \mathcal{A}^{\mathbb{E}}/J(\mathcal{A})^{\mathbb{E}}.$$

Como $\mathcal{A}^{\mathbb{E}}/J(\mathcal{A})^{\mathbb{E}}$ é semissimples, o mesmo é semiprimitivo. Daí $J(\mathcal{A}^{\mathbb{E}}) \subseteq J(\mathcal{A})^{\mathbb{E}}$. Por outro lado, é verdade que $J(\mathcal{A})^{\mathbb{E}} \subseteq J(\mathcal{A}^{\mathbb{E}})$. Daí $J(\mathcal{A}^{\mathbb{E}}) = J(\mathcal{A})^{\mathbb{E}}$ e

$$\mathcal{A}^{\mathbb{E}}/J(\mathcal{A}^{\mathbb{E}}) \cong M_{n_1}(\mathbb{E}) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(\mathbb{E})$$

Portanto, $\mathbb{E}$ é um splitting field de $\mathcal{A}$. $\square$

Corolário. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra, e assuma que $\mathbb{F}$ é uma splitting field de $\mathcal{A}$. Se $\mathbb{E} \supseteq \mathbb{F}$ é extensão de corpos, então $J(\mathcal{A}^{\mathbb{E}}) = J(\mathcal{A})^{\mathbb{E}}$. $\square$

Corolário. Sejam $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{E} \supseteq \mathbb{F}$ corpos e $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra. Se $\mathbb{E}$ é uma splitting field de $\mathcal{A}$, então $\mathbb{L}$ também é uma splitting field de $\mathcal{A}$.

Dem.: Temos que $\mathbb{E}$ é um splitting field de $\mathcal{A}^{\mathbb{E}}$. Daí $\mathbb{L}$ é uma splitting field de $(\mathcal{A}^{\mathbb{E}})^{\mathbb{L}} \cong \mathcal{A}^{\mathbb{L}}$. Portanto, $\mathbb{L}$ é uma splitting field de $\mathcal{A}$. $\square$

Exemplos.

1. Se G é abel. finito e $m = \exp. G$, então $\mathbb{Q}(\xi)$ é splitting field de G, em que $\xi \neq \xi^m = 1$.

2. $\mathbb{Q}$ é uma splitting field de S_n.