Radical de Jacobson

Sejam R um anel e M um R-módulo à esquerda. Denota-se $\mathrm{Ann}_R M = \{r \in R \mid rm = 0, \forall m \in M\}$. Note que $\mathrm{Ann}_R M$ é o núcleo do hom. de anéis $R \to \mathrm{End}(M,+)$.

Dizemos que M é *fiel* se $\mathrm{Ann}_R M = 0$.

Def. Dizemos que R é *primitivo* (à esquerda) se existe um R-módulo à esquerda que é fiel e irredutível.

Teorema. Seja R um anel primitivo. Então somente uma ocorre:

(i) existem $m \in \mathbb{N}$ e anel de divisão D tais que $R \cong M_m(D)$,

(ii) $\exists$ anel de divisão D e, $\forall m \in \mathbb{N}$, existe subanel $S \subseteq R$ e um hom. de anéis sobrejetor $S \to M_m(D)$.

Dem.: Segue do Teorema da Densidade. $\square$

Def. Dizemos que um ideal (bilateral) $P \subseteq R$ é *primitivo* se R/P é anel primitivo.

Def.: O *Radical de Jacobson* de R é

$$J(R) = \bigcap \{P \subseteq R \text{ primitivos}\}.$$

Def.: Um anel R é dito ser semiprimitivo se $J(R)=0$.

Lema. Se $I \subseteq R$ é ideal tal que $J(R/I)=0$, então $I \supseteq J(R)$. Ainda, $J(R/J(R))=0$.

Dem.: $P/I \subseteq R/I$ é primitivo $\iff$ $(R/I)/(P/I) \cong R/P$ é primitivo $\iff$ P é primitivo e contém I.

Daí

$$J(R/I)=0 \iff I = \bigcap_{\substack{P \subseteq R \text{ prim.},\\ I \subseteq P}} P \supseteq J(R).$$

Se $I = J(R)$, então

$$J(R) = \bigcap_{\substack{P \subseteq R \text{ prim}\\ J(R) \subseteq P}} P = J(R) \Rightarrow J(R/J(R))=0.$$

$\square$

Lema. Seja $P \subseteq R$ um ideal. Então P é primitivo $\iff$ $\exists L \subseteq R$ ideal maximal à esquerda tal que

$$P = \{r \in R \mid rR \subseteq L\} =: (L:R)$$

Dem.: ($\Rightarrow$) Existe um R/P-módulo M que é fiel e irredutível. Então M é um R-módulo irredutível. Além disso, $M \cong R/L$, em que $L \subseteq R$ é ideal maximal à esquerda.

Daí
$$P = \mathrm{Ann}_R M = \{r \in R \mid rR \subseteq L\} = (L : R).$$
($\Leftarrow$) Assuma que $P = (L : R)$, com $L \subseteq R$ max. à esquerda. Então $M := R/L$ é um R-módulo à esq. irredutível. Ainda,
$$\mathrm{Ann}_R M = (L : R) = P.$$
Portanto, M é um R/P-módulo fiel e irr. Daí P é primitivo. $\square$

Lema. $J(R) = \bigcap \{L \subseteq R \text{ ideal à esq. maximal}\}$.

Dem.: Seja $J' = \bigcap \{L \subseteq R \text{ ideal à esq. max.}\}$. Por um lado,
$$J(R) \subseteq J'.$$
Por outro lado, seja $P = (L : R)$ primitivo. Então
$$P = \mathrm{Ann}_R (R/L) = \bigcap_{m \in R/L} \mathrm{Ann}_R (m) \supseteq J'.$$
Portanto, vale que $J = J'$. $\square$

Lema. Seja R com 1. Então
$$J(R) = \{r \in R \mid 1 - sr \text{ é invertível a esq.}, \forall s \in R\}.$$

Dem.: Temos que $r \in J(R)$

$\iff Sr \in L, \forall L \subseteq R$ ideal à esq. max. e $s \in R$

$\iff 1 - sr \notin L, \forall L \subseteq R$ ideal à esq. max. e $s \in R$

(($\Leftarrow$) de fato: Se $sr \notin L$, p/ algum L, então $Rsr + L = R$
$\Rightarrow 1 = tsr + l \Rightarrow 1 - tsr \in L$, absurdo)

$\iff 1 - sr$ é inv. à esquerda. $\square$

Um elemento r é dito ser quasi-regular se $1 - r$ é invertível à esquerda. Um ideal $I \subseteq R$ é dito ser quasi-regular se todo $r \in I$ é quasi-regular.

Lema. Um elemento nilpotente é quasi-regular.

Dem.: Assuma que $z^m = 0$. Então

$$(1 + z + z^2 + \cdots + z^{m-1})(1 - z) = 1. \quad \square$$

Corolário. (i) $J(R)$ é quasi-regular, e contém todo ideal quasi-regular.

(ii) $J(R)$ contém todos os ideais nil. $\square$

Corolário. Se R é semiprimitivo, então R é semiprimo. $\square$

Se $J(R) = 0$, e $I \subseteq R$, com $I^2 = 0$, então $I \subseteq J(R) = 0$
$\Rightarrow R$ é semiprimo.

Teorema. Se R é artiniano, então $J(R)$ é nilpotente.

Dem.: Seja $J = J(R)$. Então, existe $m > 0$ tal que

$$J \supseteq J^2 \supseteq J^3 \supseteq \dots \supseteq J^m = J^{m+1} = \dots$$

Seja $B = J^m$. Então $B^2 = J^{2m} = B$. Se $B = 0$, então J é nilpotente. Assuma que $B \neq 0$. Então $B^2 = B \neq 0$. Daí, existe $I \leq R$ min. à esquerda tal que $0 \neq B \cdot I \subseteq I$. Portanto, $B \cdot I = I$. Seja $a \in I$ t.q. $0 \neq B \cdot a \subseteq I$. Assim, $B \cdot a = I$. Então, existe $b \in B$ tal que $b \cdot a = a \Rightarrow (1-b)a = 0$. Mas $b \in B \subseteq J$, e daí, existe $t \in R$ t.q. $t(1-b) = 1$. Isso implica $a = t(1-b) \cdot a = 0$, uma contradição. $\square$

Corolário. Seja M um R-módulo irredutível, em que R é artiniano. Então $J(R)M = 0$.

Dem.: $J(R)M = 0$ ou M, pois $J(R) \cdot M$ é um R-submod. de M. Se $J(R)M = M$, então

$$M = J(R) \cdot M = J(R)^2 \cdot M = \dots = J(R)^m \cdot M.$$

Mas, $J(R)$ é nilpotente, ou seja, $J(R)^m = 0$, p/ algum m. Isso implica $M = 0$, uma contradição. $\square$

Corolário. Seja R artiniano com 1.
M é um R-mód. irredutível $\iff$
M é um $R/J(R)$-mód. irredutível. $\square$