Relembre:

**Proposição.** Sejam $f: G \to \mathbb{C}$ uma função de classe e $\rho: G \to GL(V)$ uma representação. Defina

$$\rho_f = \sum_{g \in G} f(g)\, \rho_g . =$$

Se $\rho$ é irredutível com caracter $\chi$, então

$$\rho_f = \frac{|G|}{\dim V} \left( f, \overline{\chi} \right) \cdot I .$$

**Proposição.** Sejam $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$ as classes de conjugação de $G$, e sejam $\chi_1, \dots, \chi_m$ os caracteres irredutíveis de $G$. Então

(i) Se $g \in \mathcal{C}_j$, então $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \chi_i(g) \overline{\chi_i(g)} = \frac{|G|}{|\mathcal{C}_j|}$

(ii) Se $g$ e $h$ estão em classes distintas, então

$$\sum_{i=1}^{m} \chi_i(g) \overline{\chi_i(h)} = 0 .$$

**Def.** Um grupo $G$ é solúvel se existe

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_s = 1$$

tais que:

(i) $G_{i+1} \subseteq G_i$ é normal

(ii) $G_i / G_{i+1}$ é abeliano.

**Lema.** Seja $H \subseteq G$ normal. Então

$G$ é solúvel $\iff$ $H$ e $G/H$ são solúveis.

**Lema.** Sejam $G$ grupo finito, $g \in G$, e $\mathcal{C}$ a classe de conj. de $g$. Então $|\mathcal{C}| = [G : C(g)]$.

**Lema.** Seja $G$ um grupo com $|G| = p^m$, $p$ primo. Então $C(G) \neq 1$.

**Corolário.** Se $|G| = p^m$, então $G$ é solúvel.

# Critério de Solubilidade de Burnside

**Proposição.** Sejam $G$ um grupo finito, $\rho$ uma representação e $\chi$ seu caracter. Então

(i) $\chi(g)$ é um inteiro algébrico, $\forall g \in G$,

(ii) $|\chi(g)| \leq \chi(1)$, $\forall g \in G$,

(iii) $\chi(g) = \chi(1) \iff \rho(g) =$ mult. da identidade.

**Dem.:** Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ os autovalores de $\rho(g)$. Então, como $\rho(g)^{|G|} = 1$, vale que $\lambda_i^{|G|} = 1$. Daí cada $\lambda_i$ é uma raiz da unidade. Assim, $\lambda_i$ é um inteiro algébrico, $|\lambda_i| = 1$. Assim,

$$\chi(g) = \lambda_1 + \dots + \lambda_s$$

é um inteiro algébrico. Além disso,

$$|\chi(g)| = |\lambda_1 + \dots + \lambda_s| \leq |\lambda_1| + \dots + |\lambda_s| = \chi(1).$$

Além disso, a desigualdade é uma igualdade $\iff$ $\lambda_1 = \dots = \lambda_s$. $\square$

**Proposição.** Sejam $\mathcal{C}$ uma classe de conj. de $G$, $g \in G$, e $\chi$ um caracter irr. de $G$. Então, $|\mathcal{C}|\chi(g)/\chi(1)$ é um inteiro algébrico.

Dem.: Sejam $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_s$ as classes de conjugação de $G$, e $c_1, \dots, c_s : G \to \mathbb{C}$ as funções de classe definidas por

$$c_i(g) = \begin{cases} 1, & \text{se } g \in \mathcal{C}_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Seja $\rho$ uma rep. irredutível com caracter $\chi$. Defina

$$C_i := \left(\sum_{g \in G} c_i(g)\rho_g\right) = \frac{|G|}{\chi(1)}(c_i, \overline{\chi}) \cdot Id$$

$$= \frac{|G|}{\chi(1)} \frac{1}{|G|} |\mathcal{C}_i| \chi(g_i) \cdot Id$$

(em que $g_i \in \mathcal{C}_i$)

$$= \left(\frac{|\mathcal{C}_i| \chi(g_i)}{\chi(1)}\right) \cdot Id.$$

Denote $w_i := \dfrac{|\mathcal{C}_i| \chi(g_i)}{\chi(1)}$. Temos que existem $e_{ijk} \in \mathbb{Z}$,

$$w_i w_j Id = C_i C_j = \sum_{k=1}^{s} e_{ijk} C_k = \left(\sum_{k=1}^{s} e_{ijk} w_k\right) \cdot Id.$$

Assim, obtemos a seguinte equação: seja $E_i = (e_{ijk})_{(j,k)}$, então

$$w_i \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_s \end{pmatrix} = E_i \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_s \end{pmatrix}$$

Então $w_i$ é um autovar de $E_i$. Então $w_i$ é raiz do polinômio $\det(X \cdot Id - E_i) \in \mathbb{Z}[X]$. Daí $w_i$ é um inteiro algébrico. $\square$

**Corolário.** Se $\chi$ é irredutível, então $\chi(1) \mid |G|$.

**Dem.:** Sejam $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_s$ as classes de conj. de $G$, e $g_i \in \mathcal{C}_i$. Então $|\mathcal{C}_i| \chi(g_i)/\chi(1)$ é um inteiro algébrico, e $\overline{\chi(g_i)}$ é um inteiro algébrico. Além disso, também é um inteiro algébrico:

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{|\mathcal{C}_i| \chi(g_i) \cdot \overline{\chi(g_i)}}{\chi(1)} = \frac{1}{\chi(1)} |G| (\chi, \chi) = \frac{|G|}{\chi(1)} \in \mathbb{Q}.$$

Daí $|G|/\chi(1) \in \mathbb{Z}$. Ou seja, $\chi(1) \mid |G|$. $\square$

**Lema.** Sejam $\mathcal{C}$ uma classe de conjugação de $G$, $g \in G$ e $\chi$ um caracter irredutível de $G$. Assuma que $\operatorname{mdc}(\chi(1), |\mathcal{C}|) = 1$. Então, ou $|\chi(g)| = \chi(1)$, ou $\chi(g) = 0$.

**Dem.:** Existem $n, m \in \mathbb{Z}$ tais que $\chi(1) m + |\mathcal{C}| n = 1$.

Daí, o seguinte é um int. alg.

$$n\,|\mathcal{C}|\,\frac{\chi(g)}{\chi(1)} = \frac{\chi(g)}{\chi(1)} - \frac{\chi(1)\cdot m\chi(g)}{\chi(1)} = \frac{\chi(g)}{\chi(1)} - m\,\chi(g).$$

Daí $\chi(g)/\chi(1)$ é um inteiro algébrico. Assuma que $|\chi(g)| < \chi(1)$. Seja $\mathbb{K}$ o corpo de raízes de $X^{|G|} - 1$ sobre $\mathbb{Q}$. Então $\mathbb{K}/\mathbb{Q}$ é galoisiana e finita. Seja $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$. Então, se

$$\chi(g) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_s,$$

então $\sigma\lambda_i$ é raiz da unidade, $\forall i$. Daí

$$|\sigma(\chi(g))| \leq |\chi(1)|.$$

Portanto,

$$\left| \prod_{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{K})} \sigma\left(\chi(g)/\chi(1)\right) \right| < 1,$$

e $\prod_{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{K})} \sigma\left(\chi(g)/\chi(1)\right) \in \text{int. alg.}\,\mathbb{K} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$. Daí

$\chi(g) = 0.$ $\square$

**Lema.** Seja $G$ um grupo finito, e assuma que existe uma classe de conj. $\mathscr{C}$, com $|\mathscr{C}| = q^k$, $q$ primo e $k > 0$. Então $G$ não é simples.

**Dem.:** Assuma que $G$ é simples, e seja $\mathbb{K}$ o corpo de raízes de $X^{|G|} - 1$ sobre $\mathbb{Q}$. Afirmamos que existe um caracter irr. $\chi$ tal que $q \nmid \chi(1)$ e $\chi(g) \neq 0$ (em que $g \in \mathscr{C}$). Sejam $\chi_1, \dots, \chi_s$ os caracteres irr. de $G$, e assuma que $\chi_1 =$ trivial. Então

$$0 = \sum_{i=1}^{s} \chi_i(g) \overline{\chi_i(1)} = 1 + \sum_{i=2}^{s} \chi_i(g) \chi_i(1).$$

Se, $\forall i$, ou $q \mid \chi_i(1)$ ou $\chi_i(g) = 0$, então

$$1 = -\sum_{i=2}^{s} \chi_i(g) \chi_i(1) \in q\,(\text{alg. int}\,\mathbb{K}),$$

uma contradição. Daí, existe um tal caracter. Seja $\rho$ uma rep. cujo caracter é o $\chi$. Defina

$$G_1 = \{h \in G \mid \rho(h) = \text{mult. ident.}\} = \{h \in G \mid |\chi(h)| = \chi(1)\}.$$

Então $G_1$ é subgrupo normal de $G$, e contém $g \neq 1$.

Como assumimos que $G$ é simples, então $G_1 = G$. Daí $gr(\rho) = 1$. Seja $G' = \langle aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G \rangle$. Então, como $G' \subseteq \ker \rho$, $\rho$ se fatora

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr] & \circlearrowleft & \mathbb{C}^{\times} \\ & G/G' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Daí $G/G'$ admite uma rep. irr. que não é a identidade. Daí $G/G' \neq 1$. Como $G$ é assumido ser simples, então $G' = 1$. Isso implica que $G$ é abeliano. Assim, $|\Sigma| = 1$, uma contradição. $\square$

**Teorema.** Seja $G$ um grupo finito, com $|G| = p^a q^b$, $p$ e $q$ primos e $a, b \geq 0$. Então $G$ é solúvel.

Dem.: Se $a = 0$ ou $b = 0$, então sabe-se que $G$ é solúvel. Então, podemos assumir $a > 0$ e $b > 0$. Basta provar que $G$ não é simples. De fato, pois se $H \subseteq G$ é subgrupo normal não trivial, então $|H|$ e $|G/H|$ são da forma $p^{a'} q^{b'}$. Por indução, os mesmos são solúveis, e daí $G$ é solúvel.

Seja $H$ um $p$-Subgrupo de Sylow de $G$ ($|H|=p^a$). Então $C(H)\neq 1$. Seja $1\neq g\in C(H)$. Daí $C(g)\supseteq H$. Se $C(g)=G$, então $g\in C(G)$, e portanto $C(G)\neq 1$. Daí $G$ não é simples.

Se não, então

$$|\mathcal{C}| = [G:C(g)] = q^k, \quad k>0,$$

em que $\mathcal{C}$ é a classe de conj. que contém $g$.

Portanto, do lema anterior, $G$ não é simples. $\square$