Exemplos de tabelas de caracter

(1) Grupo cíclico C_n.

Seja $C_n = \langle g \mid g^n = 1 \rangle$. Como C_n é abeliano, todas as suas representações irredutíveis possuem grau 1. Se $\Psi : C_n \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ é hom. de grupos, então

$$1 = \Psi(g^n) = \Psi(g)^n.$$

Daí $\Psi(g)$ é uma n-ésima raiz de 1. Para cada $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, seja $\chi_j : C_n \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ dada por

$$\chi_j(g) = e^{\frac{2\pi j}{n} i}.$$

Como existem exatamente $|C_n| = n$ caracteres irredutíveis, $\{\chi_0, \dots, \chi_{n-1}\}$ é o conj. de todos os caracteres irr. de C_n.

Note que $\chi_{j_1}\chi_{j_2} = \chi_{j_1+j_2}$ (Soma módulo n).

Então $\{\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{n-1}\}$ admite estrutura de grupo, que é isomorfo a C_n.

Obs. Assim, obtemos todos os caracteres de um grupo abeliano finito.

Critério de Mackey. Seja $\rho : H \to GL(W)$ uma rep. e χ seu caracter. Seja $\mathrm{Ind}_H^G \rho : G \to GL(V)$ a rep. induzida, que tem caracter $\mathrm{Ind}\,\chi$.

Temos que $\mathrm{Ind}_H^G \rho$ é irr. $\iff (\mathrm{Ind}\,\chi, \mathrm{Ind}\,\chi)_G = 1$.

Mas, por Reciprocidade de Frobenius, temos

$$(\mathrm{Ind}\,\chi, \mathrm{Ind}\,\chi)_G = (\chi, \mathrm{Ind}\,\chi|_H)_H =$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi(h) \overline{\mathrm{Ind}\,\chi(h)}$$

$$= \frac{1}{|H|^2} \sum_{h \in H} \chi(h) \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1}ht \in H}} \overline{\chi(t^{-1}ht)}$$

$$= \frac{1}{|H|^2} \sum_{t \in G} \sum_{h \in (tHt^{-1}) \cap H} \chi(h) \overline{\chi(t^{-1}ht)}$$

$$= \frac{1}{|H|^2} \left(\sum_{t \in H} \sum_{h \in (tHt^{-1}) \cap H} \chi(h) \overline{\chi(t^{-1}ht)} + \sum_{t \notin H} \sum_{h \in (tHt^{-1}) \cap H} \chi(h) \overline{\chi(t^{-1}ht)} \right)$$

$$= \frac{1}{|H|^2} \left(\sum_{t \in H} \sum_{h \in H} \chi(h) \overline{\chi(h)} + \sum_{t \notin H} \sum_{h \in (tHt^{-1}) \cap H} \chi(h) \overline{\chi(t^{-1}ht)} \right)$$

$$= \frac{1}{|H|^2}\left(|H| \cdot |H| (\chi,\chi)_H + \sum_{t \notin H} \sum_{h \in (tHt^{-1}) \cap H} \chi(h) \overline{\chi(t^{-1}ht)} \right).$$

$$= (\chi,\chi)_H + \frac{1}{|H|^2} \sum_{t \notin H} \sum_{h \in H_t} \chi(h) \overline{\chi^{(t)}(h)}$$

em que $H_t = (tHt^{-1}) \cap H$, e $\chi^{(t)}(h) := \chi(t^{-1}ht)$,
é o caracter de $\rho^{(t)} : H_t \longrightarrow GL(W)$,

$$\rho^{(t)}(h) := \rho(t^{-1}ht).$$

Daí

$$(\mathrm{Ind}\,\chi, \mathrm{Ind}\,\chi)_G = \underbrace{(\chi,\chi)_H}_{>0} + \frac{1}{|H|^2} \sum_{t \notin H} |H_t| \underbrace{(\chi|_{H_t}, \chi^{(t)})_{H_t}}_{\geq 0}.$$

Portanto, obtemos as equivalências:

(i) $(\mathrm{Ind}\,\chi, \mathrm{Ind}\,\chi)_G = 1$,

(ii) $(\chi,\chi)_H = 1$ e $(\chi|_{H_t}, \chi^{(t)})_{H_t} = 0$, $\forall t \notin H$.

Corolário. Se H é normal, então são equivalentes:

(i) $\mathrm{Ind}\,\chi$ é caracter irredutível,

(ii) χ é irredutível, e $\chi \neq \chi^{(t)}$, $\forall t \notin H$.

(2) Grupo dihedral D_n.

Seja $D_n = \langle r, s \mid s^2 = 1, r^n = 1, srs = r^{-1} \rangle$. Temos que $\langle r \rangle \cong C_n$, então as rep. irredutíveis de D_n possuem grau no máximo $|D_n|/|\langle r \rangle| = 2$. Além disso, $[D_n : \langle r \rangle] = 2 \Rightarrow \langle r \rangle$ é subgrupo normal.

(a) rep. irr. de grau 1:

Seja $\psi : D_n \to \mathbb{C}^\times$ um hom. de grupos. Então

$$1 = \psi(s^2) = \psi(s)^2 \Rightarrow \psi(s) \in \{1, -1\}.$$

Ainda $\psi(r^{-1}) = \psi(s)\psi(r^{-1})\psi(s) = \psi(sr^{-1}s) = \psi(r)$.

Daí $\psi(r)^2 = 1$, e portanto, $\psi(r) = \{1, -1\}$. Temos também

$$1 = \psi(r^n) = \psi(r)^n.$$

- Se n é ímpar, então $\psi(r) = 1$. Daí, $\psi(s) \in \{1, -1\}$. Ambas as escolhas estão bem definidas, então temos dois hom. de grupos

$$\psi_1 : D_n \to \mathbb{C}^\times, \quad \psi_1(s) = 1,$$
$$\psi_{-1} : D_n \to \mathbb{C}^\times, \quad \psi_{-1}(s) = -1$$

- Se n é par, então temos 4 hom.:

$$\psi_{ij} : D_n \to \mathbb{C}^\times, \quad i, j \in \{1, -1\},$$
$$\psi_{ij}(s) = i, \quad \psi_{ij}(r) = j.$$

(b) rep. induzidas

Seja $\chi_j : \langle r \rangle \to \mathbb{C}^\times$, tal que

$$\chi_j(r) = e^{\frac{2\pi j}{n} i}.$$

Temos que $\operatorname{Ind} \chi_j$ é caracter irredutível $\iff \chi_j \neq \chi_j^{(s)}$, pois $D_n/\langle r \rangle = \{\langle r \rangle, s\langle r \rangle\}$.

Temos que

$$\chi_j^{(s)}(r) = \chi_j(srs) = \chi_j(r^{-1}) = e^{\frac{-2\pi j}{n} i}.$$

Daí

$$\chi_j = \chi_j^{(s)} \iff \chi_j^{(s)}(r) = \chi_j(r) \iff e^{\frac{2\pi j}{n} i} = e^{\frac{-2\pi j}{n} i}$$

$$\iff e^{\frac{4\pi j}{n} i} = 1 \iff \frac{4\pi j}{n} \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\iff \frac{j}{n} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \iff j \in \{0, \tfrac{n}{2}\} \cap \mathbb{Z}.$$

Portanto, se $j \neq 0$ e $j \neq \frac{n}{2}$, então $\operatorname{Ind} \chi_j$ é caracter irredutível de D_n.

$$\operatorname{Ind} \chi_j(sr^l) = 0,$$

$$\operatorname{Ind} \chi_j(r^l) = \chi_j(r^l) + \chi_j(sr^ls) =$$

$$= e^{\frac{2\pi l j}{n} i} + e^{-\frac{2\pi l j}{n} i} = 2\cos\left(\frac{2\pi l j}{n}\right).$$

Note que Ind χ_j = Ind χ_{n-j}. Então, temos Ind χ_j, com $0<j<\frac{n}{2}$.

(a) Se n é ímpar, então $2\cdot 1^2+\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot 2^2 = 2n = |D_n|$. Daí, os caract. irr. são todos os possíveis. A tabela fica: $\{1\}$, $\{s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$, $\{r^\ell, r^{-\ell}\}$, $0<\ell\leq\frac{n-1}{2}$.

	1	s	r^ℓ $\left(0<\ell\leq\frac{n-1}{2}\right)$
ψ_1	1	1	1
ψ_{-1}	1	-1	1
Ind χ_j $\left(0<j\leq\frac{n-1}{2}\right)$	2	0	$2\cos\left(\frac{2\pi\ell j}{n}\right)$

(b) Se n é par, então $4\cdot 1^2+\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot 2^2 = 2n = |D_n|$.

As classes de conj. de D_n são: $\{1\}$, $\{s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$, $\{sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$, $\{r^{n/2}\}$, $\{r^\ell, r^{-\ell}\}$, $0<\ell<\frac{n}{2}$.

A tabela fica:

	1	s	sr	$r^{n/2}$	r^ℓ $(0<\ell<n/2)$
$\psi_{1,1}$	1	1	1	1	1
$\psi_{-1,1}$	1	-1	-1	1	1
$\psi_{1,-1}$	1	1	-1	$(-1)^{n/2}$	$(-1)^\ell$
$\psi_{-1,-1}$	1	-1	1	$(-1)^{n/2}$	$(-1)^\ell$
$\left(0<j<\frac{n}{2}\right)$ Ind χ_j	2	0	0	$2(-1)^j$	$2\cos\left(\frac{2\pi\ell j}{n}\right)$