Representação induzida

Sejam G um grupo finito, $H \subseteq G$ um subgrupo e $\rho: G \to GL(V)$ uma representação. Então temos uma representação $\rho|_H: H \to GL(V)$ dada pela restrição. Seja W uma subrepresentação de H, e chame de $\theta: H \to GL(W)$.

Dados $g \in G$, $h \in H$, temos que

$$\rho_{gh}(W) = \rho_g \rho_h(W) = \rho_g(W).$$

Portanto, para cada $\sigma = gH \in G/H$, fica bem definido o espaço

$$W_\sigma = W_{gH} := \rho_g W.$$

Def. Dizemos que ρ é *induzido* por θ se

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma .$$

Exemplos. (0) Note que $\dim V = [G:H] \dim W$.

(1) Seja $\rho_R: G \to GL(\mathbb{C}G)$ a representação regular e $H \subseteq G$ subgrupo. Seja $W := \operatorname{Span}\{e_h \mid h \in H\}$.

Então $\theta : H \longrightarrow GL(W)$, $\theta(h) = \rho_R(g)|_W$ é uma representação de H. θ é isomorfa a representação regular de H.

Note que

$$\sigma = gH \in G/H, \quad W_\sigma = \mathrm{Span}\{e_{gh} \mid h \in H\}$$
$$= \mathrm{Span}\{e_t \mid t \in \sigma\},$$

Portanto, $\mathbb{C}G = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$. Daí ρ_R é induzida por θ.

(2) Sejam $H \subseteq G$, e seja $V = \mathrm{Span}\{e_\sigma \mid \sigma \in G/H\}$. Então $\rho : G \to GL(V)$, $\rho_g(e_\sigma) := e_{g\sigma}$ é uma representação. Sejam $W = \mathrm{Span}\{e_H\}$ e

$$\theta : H \longrightarrow GL(W).$$

Então θ é a representação trivial. Além disso,

$$W_\sigma = \mathrm{Span}\{e_\sigma\}.$$

Portanto, $V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$. Daí ρ é induzida pela representação trivial de H.

(3) Seja $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$. Se ρ_i é induzida por θ_i, então ρ é induzida por $\theta_1 \oplus \theta_2$.

Seja $\theta: H \to GL(W)$ uma representação. Então W é um $\mathbb{C}H$-módulo. Ainda, $\mathbb{C}H \hookrightarrow \mathbb{C}G$.
Portanto, $\mathbb{C}G$ é $(\mathbb{C}G, \mathbb{C}H)$-bimódulo, pelo produto de $\mathbb{C}G$. Daí

$$\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W$$

é um $\mathbb{C}G$-módulo à esquerda. Daí temos uma representação $G \to GL(\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W)$.

Teorema. Sejam $\rho: G \to GL(V)$ e $\theta: H \to GL(W)$. Então ρ é induzida por θ se, e somente se

$$V \cong \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W \text{ (como } \mathbb{C}G\text{-módulos).}$$

Dem.: Escreva $G/H = \{g_1 H, \ldots, g_s H\}$. Então

$$\mathbb{C}G = g_1 \mathbb{C}H \oplus \cdots \oplus g_s \mathbb{C}H \text{ (como } \mathbb{C}H\text{-mod).}$$

Daí

$$\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{s} g_i \mathbb{C}H\right) \otimes_{\mathbb{C}H} W \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \left(g_i \mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}H} W\right)$$

$$\cong \bigoplus_{i=1}^{s} g_i \left(\mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}H} W\right) \cong \bigoplus_{i=1}^{s} g_i W.$$

Assuma que $V \cong \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W \cong \bigoplus_{i=1}^{s} g_i W$.

Portanto, ρ é induzido por θ.

Reciprocamente, defina

$$\Psi : \mathbb{C}G \times W \longrightarrow V,$$

$$\Psi(g, w) = \rho_g(w).$$

Dado $h \in H$, temos que

$$\Psi(gh, w) = \rho_{gh}(w) = \rho_g \rho_h(w) = \rho_g(h \cdot w)$$

$$= \Psi(g, h \cdot w).$$

Daí Ψ é balanceado. Portanto, se fatora em

$$\Psi : \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W \longrightarrow V.$$

Tal mapa é sobrejetivo, pois ρ é induzida por θ.

Além disso,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W = \dim_{\mathbb{C}} \bigoplus_{i=1}^{s} g_i W = s \dim W$$

$$= [G : H] \cdot \dim W = \dim V.$$

Portanto, Ψ é isomorfismo. $\square$

Corolário. Seja $\theta : H \to GL(W)$ uma representação. Então existe único, a menos de isomorfismo, representação $\rho : G \to GL(V)$ induzida por θ.

Denota-se $V = \operatorname{Ind} W = \operatorname{Ind}_H^G W$.

Corolário. Sejam $H \subseteq G \subseteq K$ grupos. Então

$$\operatorname{Ind}_G^K\left(\operatorname{Ind}_H^G(W)\right) \cong \operatorname{Ind}_H^K(W).$$

Dem.: Temos que

$$\operatorname{Ind}_G^K\left(\operatorname{Ind}_H^G(W)\right) = \mathbb{C}K \otimes_{\mathbb{C}G} \left(\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W\right) \cong$$
$$\cong \left(\mathbb{C}K \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G\right) \otimes_{\mathbb{C}H} W \cong \mathbb{C}K \otimes_{\mathbb{C}H} W \cong \operatorname{Ind}_H^K(W). \square$$

Dada $f: H \to \mathbb{C}$ função de classe, seja $\operatorname{Ind} f: G \to \mathbb{C}$, dada por

$$\operatorname{Ind} f(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1}gt \in H}} f(t^{-1}gt).$$

Teorema. Sejam $G/H = \{g_1 H, \ldots, g_s H\}$, $\rho: G \to GL(V)$ induzido por $\theta: H \to GL(W)$, e χ_ρ e χ_θ seus respectivos caracteres. Então

$$\chi_\rho(g) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,s \\ g_i^{-1} g g_i \in H}} \chi_\theta(g_i^{-1} g g_i) = \operatorname{Ind} \chi_\theta(g).$$

Dem.: Seja $W_i := \rho_{g_i}(W)$. Além disso, ρ_g permuta os W_i. Considere uma base de V formada por bases de $W_1, \dots, W_s$. Então, para calcular $tr(\rho_g)$, temos que olhar para os W_i tal que $\rho_g W_i \subseteq W_i$. Mas

$$\rho_g W_i = \rho_{gg_i} W,$$

e $\rho_g W_i = W_i$ se e só se $gg_iH = g_iH$, se e só se $g_i^{-1}gg_i \in H$. Daí

$$\chi_\rho(g) = tr(\rho_g) = \sum_{\substack{i=1,\dots,s \\ g_i^{-1}gg_i \in H}} tr\left(\rho_g|_{W_i}\right) =$$

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[d, "\rho_{g_i}"'] & W \\
W_i \arrow[r, "\rho_g"] & W_i \arrow[u, "\rho_{g_i^{-1}}"']
\end{tikzcd}$$

$$= \sum_{\substack{i=1,\dots,s \\ g_i^{-1}gg_i \in H}} tr\left(\rho_{g_i^{-1}}\rho_g\rho_{g_i}|_W\right) = \sum_{\substack{i=1,\dots,s \\ g_i^{-1}gg_i \in H}} tr\left(\rho_{g_i^{-1}gg_i}|_W\right)$$

$$= \sum_{\substack{i=1,\dots,s \\ g_i^{-1}gg_i \in H}} \chi_\theta(g_i^{-1}gg_i) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1}gt}} \chi_\theta(t^{-1}gt) = \mathrm{Ind}\,\chi_\theta(g).$$

$\square$

Teorema (Fórmula de reciprocidade de Frobenius). Sejam $\varphi \in \mathcal{C}f(H)$ e $\psi \in \mathcal{C}f(G)$. Então

$$(\varphi, \psi|_H)_H = (\operatorname{Ind}\varphi, \psi)_G.$$

Dem.: Temos que

$$(\operatorname{Ind}\varphi, \psi)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \operatorname{Ind}\varphi(g)\overline{\psi(g)} =$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{|H|}\sum_{\substack{t\in G\\ t^{-1}gt\in H}} \varphi(t^{-1}gt)\overline{\psi(t^{-1}gt)}$$

$$= \frac{1}{|G|}\cdot\frac{1}{|H|}\sum_{t\in G}\sum_{g\in tHt^{-1}} \varphi(t^{-1}gt)\overline{\psi(t^{-1}gt)}$$

$$= \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{t\in G}\sum_{h\in H}\varphi(h)\overline{\psi(h)} =$$

$$= \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\varphi(h)\overline{\psi(h)} = (\varphi, \psi|_H)_H. \qquad \square$$

Corolário. Sejam $\rho: G \to GL(V)$ e $\theta: H \to GL(W)$ representações irredutíveis. Então, o número de vezes que θ aparece em $\rho|_H$ é igual ao número de vezes que ρ aparece em $\operatorname{Ind}_H^G(W)$. $\square$