Produto tensorial

Sejam R um anel, M um R-módulo à direita e N um R-módulo à esquerda.

Def. Seja $(P,+)$ um grupo abeliano. Uma função $f: M\times N \longrightarrow P$ é dito ser balanceada se:

(i) $f(m+m', n) = f(m,n)+f(m',n)$,

$f(m, n+n') = f(m,n)+f(m,n')$, $\forall m,m' \in M, \forall n,n' \in N$,

(ii) $f(mr, n) = f(m, rn)$, $\forall r \in R$, $m \in M$, $n \in N$.

Def. Sejam $f: M\times N \longrightarrow P$ e $t: M\times N \longrightarrow T$ balanceadas. Dizemos que f se fatora por T se existe um homomorfismo de grupos $f^*: T \longrightarrow P$ tal que

$$f = f^* \circ t.$$

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & T \arrow[d, dashed, "\exists f^*"] \\ & P \end{tikzcd}$$

Teorema. Sejam M um R-módulo à direita, N um R-módulo à esquerda. Então, existe um par (t, T), em que $t : M \times N \to T$ é balanceado, satisfazendo:

(i) Os elementos $t(m,n)$ geram T, em que $(m,n) \in M \times N$,

(ii) Se $f : M \times N \to P$ é balanceado, então f se fatora por T de forma única (isto é, existe única f^* tal que $f = f^* \cdot t$).

Dem. (Ideia): Seja G o grupo abeliano livre com base $M \times N$. Seja H o subgrupo gerado por

$$(m+m', n) - (m,n) - (m',n),$$

$$(m, n+n') - (m,n) - (m,n'), \quad m, m' \in M, n, n' \in N,$$

$$(mr, n) - (m, rn), \quad r \in R.$$

Sejam $T = G/H$ e $t : M \times N \to T$ definido por $t(m,n) = (m,n) + H$. Por construção, t é uma função balanceada.

Dado $f : M \times N \to P$ balanceada, defina

$$f^* : T \to P, \quad f^*((m,n)+H) = f(m,n).$$

Temos que f^* está bem definido, e f se fatora por T. Tal fatoração é única! $\square$

Def. O grupo T do Teorema anterior é denominado o produto tensorial de M por N, e denotado por

$$M \otimes_R N.$$

Teorema. O produto tensorial é único, a menos de isomorfismo. $\square$

Dado f balanceado

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\ & P \end{tikzcd}$$

Exemplo. $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = 0,$$

pois se $q \in \mathbb{Q}$ e $s \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, então

$$q \otimes s = m \cdot \frac{1}{m} q \otimes s = \frac{1}{m} q \otimes ms = 0.$$

Def. Os elementos $m \otimes n$, com $m \in M$ e $n \in N$, são denominados tensores puros.

Teorema. $\left(\bigoplus_\alpha M_\alpha\right) \otimes_R N \cong \bigoplus_\alpha \left(M_\alpha \otimes_R N\right)$.

Dem (Ideia). Temos mapa natural

$$\begin{tikzcd}
\left(\bigoplus_\alpha M_\alpha\right) \times N \arrow[r] \arrow[dr] & \left(\bigoplus_\alpha M_\alpha\right) \otimes N \arrow[d, dashed, "\exists! \varphi"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
& \bigoplus_\alpha \left(M_\alpha \otimes N\right)
\end{tikzcd}$$

Por outro lado, $\forall \alpha$,

$$\begin{tikzcd}
& M_\alpha \times N \arrow[dl] \arrow[dr, hook] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
M_\alpha \otimes N \arrow[d] \arrow[drr, dashed, "\exists! \psi_\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & & \left(\bigoplus_\alpha M_\alpha\right) \times N \arrow[d] \\
\bigoplus_\alpha \left(M_\alpha \otimes N\right) \arrow[rr, "\exists! \psi"] & & \left(\bigoplus_\alpha M_\alpha\right) \otimes N
\end{tikzcd}$$

Vale que $\psi = \varphi^{-1}$. $\square$

Def. Sejam R, S anéis e $(M,+)$ um grupo abeliano. Dizemos que M é um (R,S)-bimódulo se M é um R-módulo à esquerda, e um S-módulo à direita, e $(rm)s = r(ms)$, $\forall r \in R, \forall s \in S, \forall m \in M$.

Se M é um (R,S)-bimódulo e N é um S-módulo à direita, então $M \otimes_S N$ é um R-módulo à esquerda.

De fato, dado $r \in R$, defina

$$\varphi_r : M \times N \longrightarrow M \otimes_S N$$
$$(m,n) \longmapsto (rm) \otimes n.$$

Temos que φ_r é S-balanceado, e portanto, se fatora

$$\varphi_r : M \otimes_S N \longrightarrow M \otimes_S N.$$

Então, $r \cdot (m \otimes n) := \varphi_r(m \otimes n) = (rm) \otimes n$ está bem definido. Portanto, $M \otimes_S N$ é um R-módulo à esquerda.

Da mesma forma, se N é um (S,R')-bimódulo, então $M \otimes_S N$ é um R'-módulo à direita.

Um anel R é um (R,R)-bimódulo. Daí, se N é um R-módulo à esquerda, então $R \otimes_R N$ é um R-módulo à esquerda.

Teorema. Seja R um anel com 1. Então, como R-módulos, vale

$$R \otimes_R N \cong N.$$

Dem.: Defina $f: R \times N \to N$ por $f(r,n) = rn$.

Então, vale que f é balanceada. Portanto, se fatora

$$f: R \otimes_R N \to N,$$

de forma que $f(r \otimes n) = rn$.

Por outro lado, seja $g: N \to R \otimes_R N$, definida por

$$g(n) = 1 \otimes n.$$

Então $f \circ g(n) = f(1 \otimes n) = n$, daí $f \circ g = Id_N$.

Por outro lado,

$$g \circ f(r \otimes n) = g(rn) = 1 \otimes rn = r \otimes n.$$

Daí $g \circ f = Id_{R \otimes_R N}$. Portanto, f é um isomorfismo. $\square$

Teorema. Sejam L um R-módulo à direita, M um (R,S)-bimódulo, e N um S-módulo à esquerda. Então

$$(L \otimes_R M) \otimes_S N \cong L \otimes_R (M \otimes_S N).$$

O isomorfismo é tal que

$$(l \otimes m) \otimes n \mapsto l \otimes (m \otimes n).$$

Dem.: Basta mostrar que existem mapas

$$f : (L \otimes_R M) \otimes_S N \longrightarrow L \otimes_R (M \otimes_S N),$$

$$f((l \otimes m) \otimes n) = l \otimes (m \otimes n)$$

e $g : L \otimes_R (M \otimes_S N) \longrightarrow (L \otimes_R M) \otimes_S N,$

$$g(l \otimes (m \otimes n)) = (l \otimes m) \otimes n.$$

Para cada $n \in N$, defina $f_n : L \times M \longrightarrow L \otimes_R (M \otimes_S N)$ via $f_n(l, m) = l \otimes (m \otimes n)$. Temos que f_n é balanceado, pois

$$f_n(lr, m) = (lr) \otimes (m \otimes n) = l \otimes (r(m \otimes n))$$

$$= l \otimes ((rm) \otimes n) = f_n(l, rm).$$

Portanto temos $f_n : L \otimes_R M \longrightarrow L \otimes_R (M \otimes_S N)$, tal que $f_n(l \otimes m) = l \otimes (m \otimes n)$.

Agora, defina $f : (L \otimes_R M) \times N \longrightarrow L \otimes_R (M \otimes_S N)$ por

$$f(x, n) := f_n(x).$$

Temos que

(i) $f(x + x', n) = f_n(x + x') = f_n(x) + f_n(x') = f(x, n) + f(x', n),$

(ii) $f(x, n+n') = f_{n+n'}(x) = f_n(x) + f_{n'}(x) = f(x,n) + f(x,n')$.

(iii) $f(l \otimes m, sn) = f_{sn}(l \otimes m) = l \otimes (m \otimes sn) =$

$$= l \otimes (ms \otimes n) = f(l \otimes (ms), n) = f((l \otimes m)s, n).$$

Então f é balanceado. Portanto, f se fatora

$$f : (L \otimes_R M) \otimes_S N \longrightarrow L \otimes_R (M \otimes_S N),$$

tal que $f((l \otimes m) \otimes n) = l \otimes (m \otimes n)$.

Da mesma forma, g está bem-definida, e portanto, f é um isomorfismo. $\square$

Extensão de corpos. Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão de corpos (ou seja, $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{E}$) e V um $\mathbb{F}$-espaço vetorial. Então $\mathbb{E}$ é um $(\mathbb{E}, \mathbb{F})$-bimódulo. Portanto,

$$V^{\mathbb{E}} := \mathbb{E} \otimes_{\mathbb{F}} V$$

é um $\mathbb{E}$-espaço vetorial.

Se $V = \bigoplus_{\alpha \in B} \mathbb{F}$, então

$$V^{\mathbb{E}} \cong \mathbb{E} \otimes_{\mathbb{F}} \Big(\bigoplus_{\alpha \in B} \mathbb{F} \Big) \cong \bigoplus_{\alpha \in B} \big(\mathbb{E} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F} \big) \cong \bigoplus_{\alpha \in B} \mathbb{E}.$$

Portanto, $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{E}} V^{\mathbb{E}}$.

Além disso, podemos ver $V \subseteq V^{\mathbb{E}}$, via a identificação $v \mapsto 1 \otimes v$. Portanto, se $\{v_i\}$ é uma $\mathbb{F}$-base de V, então $\{v_i\}$ é uma $\mathbb{E}$-base de $V^{\mathbb{E}}$.

Ainda, se $\mathcal{A}$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra, então $\mathcal{A}^{\mathbb{E}}$ é uma $\mathbb{E}$-álgebra. Se V é um $\mathcal{A}$-módulo, então $V^{\mathbb{E}}$ é um $\mathcal{A}^{\mathbb{E}}$-módulo.

Produto tensorial de álgebras. Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ duas $\mathbb{F}$-álgebras. Então $\mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_2$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra, via $(a_1 \otimes a_2)(a_1' \otimes a_2') = a_1 a_1' \otimes a_2 a_2'$.

Podemos identificar $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_1 \otimes 1$ e $\mathcal{A}_2 \cong 1 \otimes \mathcal{A}_2$ como subálgebras de $\mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_2$. Note que cada elemento de a_1 comuta com todos os elementos de $\mathcal{A}_2$.

Exemplos. (1) Se $\mathbb{E}/\mathbb{F}$, então

$$M_n(\mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E} \cong M_n(\mathbb{E}).$$

Mais geral: se $\mathcal{A}$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra, então

$$M_n(\mathcal{A}) \cong M_n(\mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{A}.$$

(2) $\mathbb{E}|\mathbb{F}$, então $\mathbb{F}G \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E} \cong \mathbb{E}G$.

(3) $M_r(\mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} M_s(\mathbb{F}) \cong M_{rs}(\mathbb{F})$.

(4) Sejam G_1 e G_2 grupos e $G = G_1 \times G_2$.
Então $\mathbb{F}G \cong \mathbb{F}G_1 \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}G_2$.

(5) Se $(R, +, \cdot)$ é um anel, então $R^{op} = (R, +, \cdot_{op})$ também é anel, em que

$$a \cdot_{op} b = b \cdot a.$$

Se V é um (R,S)-bimódulo, então V é um $R \otimes_{\mathbb{Z}} S^{op}$-módulo à esquerda, via

$$(r \otimes s) \cdot m = rms.$$

De fato

$$((r \otimes s)(r' \otimes s'))m = (rr' \otimes s \cdot_{op} s')m$$

$$= (rr' \otimes s's)m = rr'ms's = r(r'ms')s$$

$$= r \otimes s\,(r'ms') = r \otimes s((r' \otimes s')m).$$

Se R e S são $\mathbb{F}$-álgebras, então V é um $R \otimes_{\mathbb{F}} S^{op}$-módulo.