Caracters (parte II)

Proposição. Seja $\rho_R : G \to GL(\mathbb{C}G)$ a representação regular e χ_R o seu caracter. Então

(i) $\chi_R(1) = |G|$,

(ii) $\chi_R(g) = 0$, se $g \neq 1$.

Dem.: (i) $\chi_R(1) = \dim \mathbb{C}G = |G|$.

(ii) Seja $g \neq 1$. Então

$$\rho_R(g)(e_h) = 0 \cdot e_h + e_{gh}.$$

Daí $tr(\rho_R(g)) = 0$, e portanto $\chi_R(g) = 0$. $\square$

Teorema. A representação regular contém todas as representações irredutíveis. A multiplicidade de $\rho_i : G \to GL(W_i)$ em ρ_R é $\dim W_i$.

Dem.: Seja ρ_i irredutível e χ_i seu respectivo caracter. Então, a multiplicidade de ρ_i em ρ_R é

$$(\chi_R, \chi_i) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_R(g) \overline{\chi_i(g)} = \frac{1}{|G|} \chi_R(1) \overline{\chi_i(1)}$$

$$= \chi_i(1) = \dim W_i > 0. \ \square$$

Teorema. Sejam $W_1, \dots, W_m$ as representações irredutíveis de G, a menos de isomorfismo, e $n_i = \dim W_i$. Sejam $\chi_1, \dots, \chi_m$ seus caracteres. Então

(i) $$|G| = \sum_{i=1}^{m} n_i^2,$$

(ii) $$0 = \sum_{i=1}^{m} n_i \chi_i(g), \text{ se } g \neq 1.$$

Dem.: Do teorema anterior, temos que
$$\chi_R = n_1 \chi_1 + \cdots + n_m \chi_m.$$
Daí $$|G| = \chi_R(1) = \sum_{i=1}^{m} n_i \chi_i(1) = \sum_{i=1}^{m} n_i^2.$$
Se $g \neq 1$, então
$$0 = \chi_R(g) = \sum_{i=1}^{m} n_i \chi_i(g). \qquad \square$$

Proposição. Sejam $f: G \to \mathbb{C}$ uma função de classe e $\rho: G \to GL(V)$ uma representação. Defina
$$\rho_f = \sum_{g \in G} f(g) \rho_g.$$
Se ρ é irredutível com caracter χ, então
$$\rho_f = \frac{|G|}{\dim V} (f, \bar{\chi}) \cdot I.$$

Dem.: Seja $h \in G$. Então

$$\rho_f \circ \rho_h = \sum_{g\in G} f(g)\rho_{gh} = \sum_{g \in G} f(g)\rho_h \circ \rho_{h^{-1}} \circ \rho_{gh} =$$

$$= \rho_h \sum_{g\in G} f(g)\rho_{h^{-1}gh} = \rho_h \sum_{g\in G} f(h^{-1}gh)\rho_{h^{-1}gh} = \rho_h \circ \rho_f.$$

Portanto, se ρ é irredutível, então ρ_f é múltiplo da identidade, $\rho_f = \lambda I$. Então

$$\lambda \dim V = tr(\lambda I) = \sum_{g\in G} f(g)\, tr(\rho_g) = \sum_{g\in G} f(g)\chi(g)$$

$$= |G|\left(f, \overline{\chi}\right).$$

Portanto, $\rho_f = \frac{|G|}{\dim V}(f, \overline{\chi}) \cdot I$. ∎

Denote $\mathcal{C}f(G) = \{$ funções de classe $G \to \mathbb{C}\}$.

Teorema. Os caracteres irredutíveis $\chi_1, \dots, \chi_m$ formam uma base ortonormal de $\mathcal{C}f(G)$.

Dem.: Provemos que $\overline{\chi_1}, \dots, \overline{\chi_m}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{C}f(G)$. Seja $f: G \to \mathbb{C}$ função de classe tal que $(f, \overline{\chi_i}) = 0$, $\forall i = 1, \dots, m$. Vamos concluir que $f = 0$. Seja ρ_i uma representação irredutível. Então

$$\rho_f = \sum_{g \in G} f(g) \rho_i(g) = \frac{|G|}{\chi_i(1)} (f, \overline{\chi_i}) = 0.$$

Seja ρ_R a representação regular, e defina

$$(\rho_R)_f = \sum_{g \in G} f(g) \rho_R(g).$$

A restrição de $(\rho_R)_f$ em qualquer subrepresentação W_i é nula. Daí $(\rho_R)_f = 0$. Portanto,

$$0 = (\rho_R)_f (e_1) = \sum_{g \in G} f(g) e_g.$$

Então $f(g) = 0$, $\forall g \in G$. Daí $f = 0$. $\square$

Corolário. A quantidade de representações irr. de G, a menos de isomorfismo, coincide com a qtd. de classes de conjugação de G. $\square$

Proposição. Sejam $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$ as classes de conjugação de G, e sejam $\chi_1, \dots, \chi_m$ os caracteres irredutíveis de G. Então

(i) Se $g \in \mathcal{C}_j$, então $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \chi_i(g)\overline{\chi_i(g)} = \frac{|G|}{|\mathcal{C}_j|}$

(ii) Se g e h estão em classes distintas, então
$$\sum_{i=1}^{m} \chi_i(g)\overline{\chi_i(h)} = 0.$$

Dem.: Defina, p/ $j \in \{1, \dots, m\}$, $f_j : G \to \mathbb{C}$ por
$$f_j(g) = \begin{cases} 1, & \text{se } g \in \mathcal{C}_j, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Daí $f_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_i$, em que
$$\alpha_i = (f_j, \chi_i) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} f_j(g)\overline{\chi_i(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in \mathcal{C}_j} \overline{\chi_i(g)}.$$

Dado $h \in G$, temos que
$$f_j(h) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_i(h) = \sum_{i=1}^{m} \frac{|\mathcal{C}_j|}{|G|}\overline{\chi_i(g_j)}\chi_i(h).$$

Daí, se $h = g_j \in \mathcal{C}_j$, então

$$\frac{|G|}{|\mathcal{C}_j|} = \sum_{i=1}^{m} \overline{\chi_i(g_j)}\, \chi_i(g_j).$$

Se $h \notin \mathcal{C}_j$, então

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \overline{\chi_i(g_j)}\, \chi_i(h). \qquad \square$$

Exemplo. Seja $G = S_3$. Temos 3 classes de conjugação: (1), $(1\,2)$, $(1\,2\,3)$. Então temos 3 rep. irredutíveis. As rep. de grau 1 são os homomorfismos $S_3 \longrightarrow \mathbb{C}^\times$, e temos dois:

$$1: S_3 \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \qquad \mathrm{Sgn}: S_3 \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$
$$\sigma \longmapsto 1 \qquad\qquad \sigma \longmapsto (-1)^\sigma.$$

Seja $\phi: S_3 \longrightarrow GL(V)$ a última rep. irr.

	1	(12)	(123)
χ_1	1	1	1
χ_{sgn}	1	-1	1
ϕ	2	0	-1

$1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot p = 0$

$6 = |S_3| = 1^2 + 1^2 + 2^2$

$1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot q = 0 \Rightarrow q = 0$

Sejam $W_1, \dots, W_m$ as rep. irr. de G e $\chi_1, \dots, \chi_m$ seus caracteres.

Seja $\rho: G \to GL(V)$ uma representação. Daí

$$V = W_{i_1} \oplus \dots \oplus W_{i_s}.$$

Para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, defina

$$U_j = \sum \{W_{i_\ell} \mid W_{i_\ell} \cong W_j\}.$$

Então,

$$(*) \quad V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m.$$

Tal decomposição é denominada a decomposição canônica de V.

Teorema. Considere a decomposição canônica.

(i) Relativo a $(*)$, a projeção sobre U_j é

$$P_j = \frac{\chi_j(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_j(g)} \rho_g.$$

(ii) A decomposição canônica independe da escolha da decomposição de V em soma dos $W_1, \dots, W_m$.

Dem.: Vamos mostrar que $P_j|_{U_j} = Id$ e $P_j|_{U_k} = 0$, se $k \neq j$.

Seja $k \in \{1, \dots, m\}$ e $W_{i_\ell} \cong W_k$. Então,

$$p_j|_{W_{i_\ell}} = \frac{\chi_j(1)}{|G|} \frac{|G|}{\chi_k(1)} (\overline{\chi_j}, \overline{\chi_k}).$$

Daí $p_j|_{W_{i_\ell}} = 0$ se $k \neq j$, e $p_j|_{W_{i_\ell}} = Id$, se $k = j$. Daí

$$p_j|_{U_k} = 0, \text{ se } k \neq j, \quad e \quad p_j|_{U_j} = Id|_{U_j}.$$

Como $p_1 + \dots + p_m = Id_V$, temos que cada p_j é a projeção sobre U_j. $\square$

Corolário. Escreva $\mathbb{C}G = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$, e sejam $\chi_1, \dots, \chi_m$ os respectivos caracteres irredutíveis. Então, a unidade de B_i é

$$\frac{|\chi_i(1)|}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} e_g \in \mathbb{C}G. \qquad \square$$

Proposição. Sejam G um grupo e $A \leq G$ um subgrupo abeliano. Seja $\rho: G \to GL(V)$ irredutível. Então $gr(\rho) \leq |G|/|A|$.

Dem.: Tome a restrição $\rho_A = \rho|_A : A \to GL(V)$.
Sendo A abeliano, existe subrepresentação $W \leq V$, de A, com $\dim W = 1$. Defina

$$V' = \sum_{g \in G} \rho_g(W) \leq V$$

Temos que V' é uma G-subrepresentação de V. Sendo V irredutível, vale que $V = V'$. Além disso, se $g \in G$ e $a \in A$, então

$$\rho_{ga} W = \rho_g \rho_a W = \rho_g W.$$

Portanto,

$$\sum_{g \in G} \rho_g(W) = \sum_{g \in G/A} \rho_g(W).$$

Portanto, $\dim V \leq [G : A] = |G| / |A|$. $\square$

Produto de grupos. Sejam $\rho^{(1)} : G^{(1)} \to GL(V^{(1)})$ e $\rho^{(2)} : G^{(2)} \to GL(V^{(2)})$ representações. Então

$$\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)} : G^{(1)} \times G^{(2)} \longrightarrow GL(V^{(1)} \otimes V^{(2)}),$$

via $(\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)})(g_1, g_2) = \rho_{g_1}^{(1)} \otimes \rho_{g_2}^{(2)}$ é representação.

O caracter de $\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}$ é χ tal que

$$\chi(g_1, g_2) = \chi^{(1)}(g_1)\,\chi^{(2)}(g_2),$$

sendo $\chi^{(i)}$ o caracter de $\rho^{(i)}$.

Proposição. $\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}$ é irredutível $\iff$ $\rho^{(1)}$ e $\rho^{(2)}$ são irr. Toda rep. irred. de $G^{(1)} \times G^{(2)}$ é da forma $\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}$.

Dem.: Temos que

$$(\chi, \chi) = \frac{1}{|G^{(1)} \times G^{(2)}|} \sum_{(g_1, g_2) \in G^{(1)} \times G^{(2)}} \chi(g_1, g_2)\overline{\chi(g_1, g_2)} =$$

$$= \frac{1}{|G^{(1)}|\,|G^{(2)}|} \sum_{(g_1, g_2)} \chi^{(1)}(g_1)\,\chi^{(2)}(g_2)\overline{\chi^{(1)}(g_1)}\,\overline{\chi^{(2)}(g_2)}$$

$$= \frac{1}{|G^{(1)}|\,|G^{(2)}|} \left(\sum_{g_1 \in G^{(1)}} \chi^{(1)}(g_1)\overline{\chi^{(1)}(g_1)}\right)\left(\sum_{g_2 \in G^{(2)}} \chi^{(2)}(g_2)\overline{\chi^{(2)}(g_2)}\right)$$

$$= (\chi^{(1)}, \chi^{(1)})_{G^{(1)}}(\chi^{(2)}, \chi^{(2)})_{G^{(2)}}.$$

Daí $(\chi, \chi) = 1 \iff (\chi^{(i)}, \chi^{(i)})_{G^{(i)}} = 1$, $i = 1, 2$.

Seja $f : G^{(1)} \times G^{(2)} \to \mathbb{C}$ função de classe, ortonormal a todo $\chi^{(1)}\chi^{(2)}$. Temos então

$$0 = \left(f, \chi^{(1)}\chi^{(2)}\right) = \frac{1}{|G^{(1)}||G^{(2)}|}\sum_{(g_1,g_2)} f(g_1,g_2)\,\overline{\chi^{(1)}(g_1)\,\chi^{(2)}(g_2)}$$

$$= \frac{1}{|G^{(2)}|}\sum_{g_2\in G^{(2)}}\left(\frac{1}{|G^{(1)}|}\sum_{g_1\in G_1} f(g_1,g_2)\,\overline{\chi^{(1)}(g_1)}\right)\overline{\chi^{(2)}(g_2)}$$

$$= \left(\frac{1}{|G^{(1)}|}\sum_{g_1\in G_1} f(g_1,\cdot\,)\,\overline{\chi^{(1)}(g_1)}\,,\ \chi^{(2)}\right)_{G^{(2)}}$$

Vale p/ todo caracter irr. de $G^{(2)}$. Portanto

$\forall s$, $0 = \frac{1}{|G^{(1)}|}\sum_{g_1\in G_1} f(g_1, s)\,\overline{\chi^{(1)}(g_1)} = \left(f(\cdot, s), \chi^{(1)}\right).$

Vale p/ todo caracter irr. de $G^{(1)}$. Portanto, $f(\cdot, s) = 0$

ou seja, $f(t,s) = 0$, $\forall (t,s)\in G^{(1)}\times G^{(2)}$. $\square$