# Caracters

Todas os espaços vetoriais serão sobre $\mathbb{C}$.

**Def.** Seja $\rho : G \to GL(V)$ uma representação. O caracter de $\rho$ é o mapa $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$ definido por
$$\chi_\rho(g) = tr(\rho_g).$$

Relembre propriedades do traço:

(i) $tr(a+b) = tr(a) + tr(b)$,

(ii) $tr(ab) = tr(ba)$ $\quad (tr(x^{-1}ax) = tr(axx^{-1}) = tr(a))$.

(iii) $a \in M_r(\mathbb{C})$, se $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ são os autovalores de $a$, então, $tr\, a = \lambda_1 + \dots + \lambda_r$.

(iv) $a \in M_r(\mathbb{C})$, $b \in M_s(\mathbb{C})$, $a \otimes b \in M_{rs}(\mathbb{C})$, em que, se $a = (a_{ij})$, então

$$a \otimes b = \begin{pmatrix} a_{11}b & a_{12}b & \cdots & a_{1r}b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}b & a_{r2}b & \cdots & a_{rr}b \end{pmatrix}.$$

Temos que
$$tr(a \otimes b) = a_{11}tr(b) + \dots + a_{rr}tr(b) = tr(a)\,tr(b).$$

**Proposição.** Seja $\chi_\rho$ o caracter de uma representação $\rho: G \to GL(V)$.

Então:

(i) $\chi_\rho(1) = \dim V$,

(ii) $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ (conj. complexo),

(iii) $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$.

**Dem.:** (i) $\rho_1 = I$, então $\chi_\rho(1) = tr(\rho_1) = \dim V$,

(ii) Temos que $\rho_g^m = I$, para algum $m > 0$.

Então todo autovalor de $\rho_g$ satisfaz $\lambda^m = 1$.

Daí $|\lambda| = 1$. Portanto, $\lambda^{-1} = \overline{\lambda}$. Além disso, os autovalores de $\rho_{g^{-1}}$ são os inversos dos autoval. de $\rho_g$. Portanto,

$$\chi_\rho(g^{-1}) = \lambda_1^{-1} + \cdots + \lambda_r^{-1} = \overline{\lambda_1} + \cdots + \overline{\lambda_r}$$

$$= \overline{\lambda_1 + \cdots + \lambda_r} = \overline{\chi_\rho(g)}.$$

(iii) Como $\rho_{hgh^{-1}} = \rho_h \rho_g \rho_h^{-1}$, segue que

$$\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$$

por propriedade do traço. $\square$

**Def.** Uma função $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo
$$f(hgh^{-1}) = f(g), \quad \forall g, h \in G$$
é denominada função de classe.

Então, caracters são funções de classe.

Sejam $\rho^{(1)}: G \longrightarrow GL(V_1)$ e $\rho^{(2)}: G \longrightarrow GL(V_2)$ duas representações e $\chi_1, \chi_2$ seus caracters.

Podemos construir: (a) $\rho^{(1)} \oplus \rho^{(2)}: G \longrightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$ via
$$(\rho^{(1)} \oplus \rho^{(2)})_g (v_1 + v_2) = \rho_g^{(1)}(v_1) + \rho_g^{(2)}(v_2), \quad v_i \in V_i.$$
(b) $\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}: G \longrightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$ via
$$(\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)})_g (v_1 \otimes v_2) = (\rho_g^{(1)}(v_1)) \otimes (\rho_g^{(2)}(v_2)), \quad v_i \in V_i.$$

**Proposição.**
(1) O caracter de $\rho_1 \oplus \rho_2$ é $\chi_1 + \chi_2$.
(2) O caracter de $\rho_1 \otimes \rho_2$ é $\chi_1 \cdot \chi_2$.

**Lema de Schur.** Sejam $\rho^{(1)}: G \longrightarrow GL(V_1)$ e $\rho^{(2)}: G \longrightarrow GL(V_2)$ duas representações irredutíveis e $f: V_1 \longrightarrow V_2$ linear tal que
$$\rho_g^{(2)} \circ f = f \circ \rho_g^{(1)}, \quad \forall g \in G.$$

Então:

(1) Se $\rho^{(1)} \not\cong \rho^{(2)}$, então $f=0$,

(2) Se $V_1 = V_2$ e $\rho^{(1)} = \rho^{(2)}$, então $f = \lambda I$, p/algum $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dem.: Temos que $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ são subrepresentações de $V_1$ e $V_2$, respectivamente.

Além disso, assuma que $V_1 = V_2$ e $\rho^{(1)} = \rho^{(2)}$. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um autovalor de $f$. Daí $\operatorname{Ker}(f - \lambda I) \neq 0$ e portanto, $\operatorname{Ker}(f - \lambda I) = V_1$ (pois $V_1$ é irredutível). Portanto $f = \lambda I$. □

**Proposição.** Sejam $\rho^{(i)}: G \to GL(V_i)$ irr., e seja $h: V_1 \to V_2$ linear. Defina

$$h_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho^{(2)}_{g^{-1}} \circ h \circ \rho^{(1)}_g .$$

Então:

(1) Se $\rho^{(1)} \not\cong \rho^{(2)}$, então $h_0 = 0$,

(2) Se $V_1 = V_2$ e $\rho^{(1)} = \rho^{(2)}$, então

$$h_0 = \frac{tr(h)}{\dim V_1} I .$$

Dem.: Note que, dado $k \in G$,

$$h_0 \circ \rho_k^{(1)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}}^{(2)} h \rho_{gk}^{(1)} = \frac{1}{|G|} \sum \rho_k^{(2)} \rho_{(gk)^{-1}}^{(2)} h \rho_{gk}^{(1)}$$

$$= \rho_k^{(2)} \circ h_0 .$$

Portanto, se $\rho^{(1)} \not\cong \rho^{(2)}$, então $h_0 = 0$.

Se $V_1 = V_2$ e $\rho^{(1)} = \rho^{(2)}$, então $h_0 = \lambda I$.

$$\lambda \dim V_1 = \operatorname{tr} h_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{tr}\left(\rho_{g^{-1}}^{(1)} h \rho_g^{(1)}\right) = \operatorname{tr} h .$$

Segue que $\lambda = \dfrac{\operatorname{tr}(h)}{\dim V_1}$. $\square$

Agora, escolha bases de $V_1$ e $V_2$. Escreva

$$[h_0] = (S_{ij}), \quad [\rho_g^{(\ell)}] = \left(r_{ij}^{(\ell)}(g)\right), \ \ell = 1,2, \ h = (h_{ij})$$

Então, no enunciado da proposição anterior, obtemos:

$$S_{ij} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{p,q} r_{ip}^{(2)}(g^{-1}) h_{pq} r_{qj}^{(1)}(g), \quad \forall i,j.$$

Tomando $h = E_{pq}$, em que $E_{pq}$ é a matriz com entrada 1 em $(p,q)$ e 0 nas demais entradas, obtemos:

$$S_{ij} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r_{ip}^{(2)}(g^{-1})\, r_{qj}^{(1)}(g).$$

Então, se $\rho^{(1)} \not\cong \rho^{(2)}$, temos

$$0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r_{ip}^{(2)}(g^{-1})\, r_{qj}^{(1)}(g), \quad \forall i, j, p, q.$$

Se $V_1 = V_2$ e $\rho^{(1)} = \rho^{(2)}$, então

$$\frac{\delta_{ij}\, \delta_{pq}}{\dim V_1} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r_{ip}^{(1)}(g^{-1})\, r_{qj}^{(1)}(g), \quad \forall p, q, i, j.$$

**Def.** Dados $\psi_1, \psi_2 : G \to \mathbb{C}$, defina

$$(\psi_1, \psi_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_1(g)\, \overline{\psi_2(g)}.$$

Temos que $(\cdot, \cdot)$ é um produto interno no espaço de todas as funções $\{G \to \mathbb{C}\}$.

**Def.** Um caracter irredutível é o caracter de uma representação irredutível.

**Teorema.** Sejam $\rho^{(i)}: G \to GL(N_i)$ representações irredutíveis e $\chi_i$ seu caracter, $i=1,2$. Então:

(i) Se $\rho^{(1)} \not\cong \rho^{(2)}$, então $(\chi_1, \chi_2) = 0$,

(ii) $(\chi_1, \chi_1) = 1$.

**Dem.:** Temos

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_1(g) \overline{\chi_2(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_1(g) \chi_2(g^{-1})$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left( \sum_i r_{ii}^{(1)}(g) \right) \left( \sum_j r_{jj}^{(2)}(g^{-1}) \right)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j} r_{jj}^{(2)}(g^{-1}) \, r_{ii}^{(1)}(g)$$

$$= \sum_{i,j} \left( \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r_{jj}^{(2)}(g^{-1}) \, r_{ii}^{(1)}(g) \right) =$$

$$= \sum_i \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r_{ii}^{(2)}(g^{-1}) \, r_{ii}^{(1)}(g).$$

Então, se $\rho^{(1)} \not\cong \rho^{(2)}$, então $(\chi_1, \chi_2) = 0$.

Se $V_1 = V_2$, $\rho^{(1)} = \rho^{(2)}$ e $\chi_1 = \chi_2$, então

$$(\chi_1, \chi_2) = \sum_{i=1}^{\dim V_1} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r_{ii}^{(2)}(g^{-1})\, r_{ii}^{(1)}(g) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\dim V_1} \frac{1}{\dim V_1} = 1. \qquad \square$$

Dada $\rho: G \to GL(V)$ representação, escreva

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r,$$

em que cada $W_i$ é uma subrepresentação irredutível. Se $\chi_i$ é o caracter de $W_i$, e $\chi_\rho$ é o carater de $\rho$, então

$$\chi_\rho = \chi_1 + \cdots + \chi_r.$$

Portanto,

$$(\chi_\rho, \chi_i) = \#\{\chi_j \mid \chi_j = \chi_i\}$$

$$= (\text{qtd. de } W_j \text{ que é isomorfo a } W_i).$$

Assim, $W_i$ tem $(\chi_\rho, \chi_i)$ cópias isomorfas em $V$. Tal número será denominada de multiplicidade da representação $W_i$ em $V$.

**Corolário.** (1) A multiplicidade de $W_i$ em $V$ é $(\chi_\rho, \chi_i)$.
(2) A quantidade de vezes que cópias de $W_i$ aparece em $V$ independe da decomposição escolhida.
(3) Duas representações com o mesmo caracter são isomorfos. $\square$

Dado $\rho : G \to GL(V)$, podemos escrever

$$V = m_1 W_1 \oplus \cdots \oplus m_s W_s,$$

em que $W_i$ é rep. irredutível com caracter $\chi_i$, e $m_i = (\chi_\rho, \chi_i)$.

Temos que

$$\chi_\rho = m_1 \chi_1 + \cdots + m_s \chi_s,$$

e

$$(\chi_\rho, \chi_\rho) = \left( \sum_{i=1}^{s} m_i \chi_i, \sum_{j=1}^{s} m_j \chi_j \right) = \sum_{i,j} m_i m_j (\chi_i, \chi_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{s} m_i^2 (\chi_i, \chi_i) = \sum_{i=1}^{s} m_i^2.$$

**Teorema.** Seja $\rho : G \to GL(V)$ uma representação e $\chi_\rho$ seu caracter. Então $\chi_\rho$ é irredutível se e só se $(\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$.

Dem.: Se $X_\rho$ é irredutível, então já vimos que $(X_\rho, X_\rho) = 1$.

Reciprocamente, temos

$$1 = (X_\rho, X_\rho) = \sum_{i=1}^{s} m_i^2, \quad m_i \in \mathbb{N}.$$

Daí $s = 1$ e $m_1 = 1$. Portanto $X_\rho = X_1$ é irredutível. $\square$