Representações de S_n (parte II)

Dado diagrama D, definimos

$$e_D = \sum_{\sigma \in R(D)} \sum_{\tau \in C(D)} (-1)^{\tau} e_{\sigma\tau} \in \mathbb{Q}S_n.$$

Lema. $R(\pi D) = \pi R(D) \pi^{-1}$, $C(\pi D) = \pi C(D) \pi^{-1}$,

$$e_{\pi D} = e_{\pi} e_D e_{\pi^{-1}}.$$

Corolário. $\mathbb{Q}S_n \cdot e_D \cong \mathbb{Q}S_n \cdot e_{\pi D}$, $\forall \pi \in S_n$.

Lema. Se D e D' são associadas a partições distintas, então $e_{D'} \cdot e_D = 0$ (a menos de trocar D por D').

Lema. Seja $\pi \in S_n$. Então existem $\sigma \in R(D)$ e $\tau \in C(D)$ tais que $\pi = \sigma\tau \iff$ não existem dois pontos numa mesma linha de D que estão numa mesma coluna de πD.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sejam i e j aparecendo numa mesma linha de D. Então i e j aparecem na mesma linha de σD. Então i e j estão em colunas distintas de σD. Como $\sigma\tau\sigma^{-1} \in C(\sigma D)$, então i e j estarão em colunas distintas de

$$\sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma D) = \sigma\tau D = \pi D.$$

($\Leftarrow$) Todos os números aparecendo na primeira linha de D aparecem em colunas distintas de πD. Então, $\sigma_1 \in R(D)$ tal que um número i aparecendo na primeira linha de $\sigma_1 D$ aparece numa coluna, que é a mesma coluna em πD. Como $\sigma_1 D$ e πD satisfazem a hipótese, então todos os números aparecendo na segunda linha de $\sigma_1 D$ aparecem em colunas distintas de πD. Então, podemos continuar o processo, e obtemos $\sigma \in R(D)$ tal que σD e πD possuem cada número numa mesma coluna. Daí, existe $\tau' \in C(\sigma D)$ tal que $\tau' \sigma D = \pi D$. Daí $\pi = \tau' \sigma = \sigma \tau \sigma^{-1} \sigma = \sigma \tau$, com $\sigma \in R(D)$ e $\tau \in C(D)$. $\square$

Lema. Seja $x \in \mathbb{Q} S_n$ e assuma que,

$$e_\sigma x e_\tau = (-1)^\tau x, \quad \forall \sigma \in R(D), \forall \tau \in C(D).$$

Então existe $\gamma \in \mathbb{Q}$ tal que $x = \gamma e_D$.

Demonstração. Escreva $x = \sum_{\pi \in S_n} \alpha_\pi e_\pi$. Então, para cada $\sigma \in R(D)$ e $\tau \in C(D)$, temos que

$$\sum_{\pi \in S_n} (-1)^\tau \alpha_\pi e_\pi = (-1)^\tau x = e_{\sigma^{-1}} x e_{\tau^{-1}} = \sum_{\pi \in S_n} \alpha_\pi e_{\sigma^{-1} \pi \tau^{-1}}.$$

Então, obtemos que

$$(-1)^{\tau}\alpha_{\pi} = \alpha_{\sigma\pi\tau}, \quad \forall \pi \in S_n, \ \forall \sigma \in R(D), \forall \tau \in C(D).$$

Tomando $\pi = 1$, obtemos que $\alpha_{\sigma\tau} = (-1)^{\tau}\alpha_1$.

Seja π que não é da forma $\sigma\tau$, $\sigma \in R(D)$, $\tau \in C(R)$. Provemos que $\alpha_{\pi} = 0$. Daí, existem dois números i, j numa mesma linha de D, e numa mesma coluna de πD. Seja $t = (i\ j)$. Então, $t \in R(D)$, e

$$t \in C(\pi D) = \pi\, C(D)\, \pi^{-1} \Rightarrow t = \pi t' \pi^{-1}, \ t' \in C(R).$$

Daí

$$(-1)^{t'}\alpha_{\pi} = -\alpha_{\pi} = \alpha_{t\pi t'} = \alpha_{t\pi\pi^{-1}t\pi} = \alpha_{\pi}.$$

Portanto, $\alpha_{\pi} = 0$. Assim, vale que

$$x = \alpha_1 \cdot e_D. \qquad \square$$

Lema. $e_D^2 = \gamma e_D$, com $\gamma \neq 0$.

Demonstração. Dado $\sigma \in R(D)$ e $\tau \in C(D)$, obtemos que

$$e_{\sigma} e_D^2 e_{\tau} = (-1)^{\tau} e_D^2.$$

Portanto, $e_D^2 = \gamma e_D$, para algum $\gamma \in \mathbb{Q}$. Provemos que $\gamma \neq 0$. Defina $T : \mathbb{Q}S_n \to \mathbb{Q}S_n$ dada por

$$T(x) = x e_D.$$

Considere a base $\{e_\pi \mid \pi \in S_n\}$ de $\mathbb{Q}S_n$. Então

$$T(e_\pi) = e_\pi e_D = e_\pi + (\ast),$$

então $\operatorname{tr} T = n!$

Por outro lado, considere uma base $\{v_1, \ldots, v_m\}$ de $\mathbb{Q}S_n e_D$, e complete para uma base de $\mathbb{Q}S_n$, digamos $\{w_1, \ldots, w_s\}$. Então $v_i = x_i e_D$. Daí

$$T(v_i) = x_i e_D e_D = \gamma x_i e_D, \ \forall i.$$

$$T(w_j) = \underbrace{w_j e_D}_{\in \mathbb{Q}S_n e_D} = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m,$$

Daí $\operatorname{tr} T = \gamma \cdot \dim \mathbb{Q}S_n e_D$. Portanto

$$n! = \gamma \dim(\mathbb{Q}S_n \cdot e_D),$$

e então, $\gamma \neq 0$. $\square$

Agora, defina $u_D = \frac{1}{\gamma} e_D$. Então u_D é idempotente, pois

$$u_D^2 = \left(\frac{1}{\gamma} e_D\right)^2 = \frac{\gamma e_D}{\gamma^2} = u_D.$$

Temos $\mathbb{Q}S_n \cdot u_D = \mathbb{Q}S_n \cdot e_D$.

Lema. $\mathbb{Q}S_n \cdot e_D$ é um ideal minimal à esquerda.

Demonstração. $\mathbb{Q}S_n \cdot e_D$ é ideal minimal à esquerda se e só se $e_D \cdot \mathbb{Q}S_n \cdot e_D$ é anel de divisão. Dado $x \in \mathbb{Q}S_n$, temos que

$$\forall \sigma \in R(D),\ \tau \in C(D),\ e_\sigma\, e_D x e_D\, e_\tau = (-1)^\tau e_D x e_D.$$

Daí, $e_D x e_D = \lambda e_D$, para algum $\lambda \in \mathbb{Q}$. Portanto, $e_D \cdot \mathbb{Q}S_n \cdot e_D \cong \mathbb{Q}$ é um anel de divisão. □

Lema. Se D e D' estão associados a partições distintas, então $\mathbb{Q}S_n \cdot e_D \not\cong \mathbb{Q}S_n \cdot e_{D'}$.

Dem.: Vimos que $L_1 \cong L_2$ se e só se $L_1 L_2 = L_2$. Então, basta mostrar que

$$(\mathbb{Q}S_n \cdot e_D) \cdot (\mathbb{Q}S_n \cdot e_{D'}) = 0.$$

Do lema anterior, podemos assumir que $e_D \cdot e_{\pi D'} = 0$, $\forall \pi \in S_n$. Tome qualquer $\pi \in S_n$. Então

$$e_D \cdot e_\pi e_{D'} = e_D\, e_\pi e_{D'} e_{\pi^{-1}} e_\pi = e_D\, e_{\pi D'} e_\pi = 0.$$

Daí $e_D \mathbb{Q}S_n e_{D'} = 0$. Portanto, $(\mathbb{Q}S_n e_D) \cdot (\mathbb{Q}S_n e_{D'}) = 0$. □

Teorema. Dada uma partição de n, considere um diagrama D. Defina os subgrupos $R(D)$ e $C(D)$ que preservam as linhas e colunas de D, respectivamente. Defina

$$e_D = \sum_{\sigma \in R(D)} \sum_{\tau \in C(D)} (-1)^\tau e_{\sigma\tau} \in \mathbb{Q}S_n.$$

(i) A menos de uma constante, e_D é um idempotente, e $\mathbb{Q}S_n \cdot e_D$ é um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{Q}S_n$,

(ii) $\mathbb{Q}S_n \cdot e_D \cong \mathbb{Q}S_n \cdot e_{\pi D}$.

(iii) Se D' é um diagrama associado a uma partição distinta da partição de D, então

$$\mathbb{Q}S_n \cdot e_D \not\cong \mathbb{Q}S_n \cdot e_{D'}.$$

(iv) Cada $\mathbb{Q}S_n$-módulo irredutível é isomorfo a algum $\mathbb{Q}S_n \cdot e_D$. $\square$

Exemplo. Temos três partições de 3:

$$3=3, \quad 3=2+1, \quad 3=1+1+1.$$

Assim, um conjunto completo de $\mathbb{Q}S_3$-módulos irr. contém 3 elementos. Sejam

$$D_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \quad D_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1} \end{array}, \quad D_3 = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}.$$

Defina $V_{D_i} = \mathbb{Q}S_3 \cdot e_{D_i}$. Já vimos que

$$\dim V_{D_1} = \dim V_{D_3} = 1.$$

Além disso, $6 = |S_3| = \sum_{i=1}^{3} (\dim V_{D_i})^2$. Daí $\dim V_{D_2} = 2$.

$$e_{D_2} = \sum_{\sigma \in R(D_2)} \sum_{\tau \in C(D_2)} (-1)^\tau e_{\sigma\tau} = \left(\sum_{\sigma \in R(D_2)} e_\sigma\right)\left(\sum_{\tau \in C(D_2)} (-1)^\tau e_\tau\right) =$$

$$= (e_1 + e_{(12)})(e_1 - e_{(13)}) = e_1 + e_{(12)} - e_{(13)} - e_{(132)}.$$

Seja $u = e_1 + e_{(12)} - e_{(13)} - e_{(132)}$. Seja

$$v = e_{(13)} \cdot u = e_{(13)} + e_{(123)} - e_1 - e_{(23)}.$$

Como $\dim \mathbb{Q}S_3 \cdot e_{D_2} = 2$, u e v forma uma $\mathbb{Q}$-base de V_{D_2}.

. $e_{(12)} u = u$, $e_{(12)} v = e_{(132)} + e_{(23)} - e_{(12)} - e_{(231)}$

$$= -u - v.$$

.. $e_{(13)} u = v$, $e_{(13)} v = e_{(13)}^2 u = u$.

Temos homomorfismo de anéis

$$\mathbb{Q}S_3 \longrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(V_{D_2}) \cong M_2(\mathbb{Q}),$$

em que

$$e_{(12)} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e_{(13)} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo. Um conjunto completo de $\mathbb{Q}S_4$-módulos irredutíveis possui 5 elementos.

Considere os diagramas

$D_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline\end{array}$, $D_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}$, $D_3 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}$, $D_4 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}$, $D_5 = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline\end{array}$.

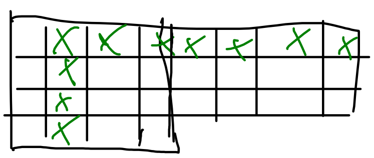
Temos $\dim V_{D_1} = \dim V_{D_5} = 1$. Vale que

$$24 = |S_4| = \sum_{i=1}^{5} (\dim V_{D_i})^2.$$

Então as dimensões são $1, 1, 2, 3, 3$.

Vamos enunciar, sem demonstrar, duas formas de calcular $\dim V_{D_i}$.

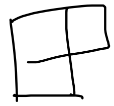
Dada uma tabela T, seja (i,j) uma posição na tabela. Define-se h_{ij} como sendo o número de caixas à direita de (i,j), e na mesma linha i, somado com o número de caixas abaixo de (i,j) e na mesma coluna j, e a própria caixa (i,j).

Exemplo.  $h_{12} = 10$.

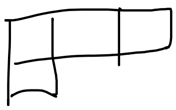
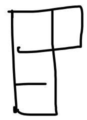
A formula do gancho:

$$\dim \mathbb{Q}S_n \cdot e_D = \frac{n!}{\prod h_{ij}},$$

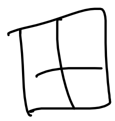
com (i,j) percorrendo todas as entradas da tabela.

Exemplo (i) D = , $h_{11} = 3$, $h_{12} = 1$, $h_{21} = 1$.

$$2 = \dim V_D = \frac{3!}{3 \cdot 1 \cdot 1} = 2.$$

(ii)  $= D_1$  $= D_2$

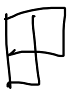
$$\dim V_{D_1} = \frac{4!}{4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 3, \quad \dim V_{D_2} = 3.$$

 $= D_3$,

$$\dim V_{D_3} = \frac{4!}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1} = 2.$$

Outra forma de calcular: um preenchimento D é denominado standard se os números crescem da esquerda p/ direita, e de cima p/ baixo.

Exemplo.
$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array}}_{\text{sã standard}} \qquad \underbrace{\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1}\end{array}}_{\text{não são standard.}}$$

 admite 2 preenchimentos que são standard.

Vale o seguinte

$$\dim V_D = (\text{qtd. de preenchimentos standard na tabela de } D).$$