# Representações de $S_n$

Vamos convencionar que os elementos de $S_n$ agem pela esquerda sobre os números $\{1, 2, \dots, n\}$, e que $\sigma\tau$ significa que aplicamos $\tau$ primeiro, e depois $\sigma$. Então

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)).$$

Todo elemento de $S_n$ pode ser escrito como produto de ciclos disjuntos, $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_s$. Se permitirmos ciclos de tamanho 1, e se $\lambda_i$ é o comprimento de $\sigma_i$, então

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_s \geq 1.$$

O tipo da permutação $\sigma$ é a sequência $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$.

**Lema.** Dado $\pi \in S_n$, vale que

$$\pi\,(i_1 \;\cdots\; i_\lambda)\,\pi^{-1} = (\pi(i_1) \;\cdots\; \pi(i_\lambda)).$$

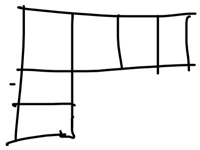
Assim, dois elementos de $S_n$ estão na mesma classe de conjugação de $S_n$ se e só se os elementos possuem o mesmo tipo.

**Def.** Uma partição de $n$ é uma sequência $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ de modo que $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_s$ e $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_s > 0$.

Assim, existe bijeção entre classes de conjugação de $S_n$ e partições de $n$.

Dada partição $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ podemos construir uma tabela da seguinte forma: a tabela possui $s$ linhas, e a $i$-ésima linha possui $\lambda_i$ caixas.

Exemplo: $(4,1,1)$ partição de 6, constrói



Dada uma tabela, preenchemos com números de 1 a $n$, sem repetir. A tabela preenchida será denominada diagrama.

Exemplo.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 5 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} 6 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

são diagramas.

Dado diagrama, temos ações à esquerda de $S_n$ da seguinte forma:

Se $D = \begin{array}{|cccc|}\hline i_1 & i_2 & \dots & i_\lambda \\ \hline \vdots & \ddots & & \\ \end{array}$, $\sigma \in S_n$, define-se

$$\sigma D = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \dots & \sigma(i_\lambda) \\ \hline \vdots & \ddots & & \\ \end{array}$$

Dado diagrama $D$, seja $R(D)$ o conjunto de todas as permutações que fixam as linhas de $D$, e $C(D)$ o conjunto de todas as permutações que fixam as colunas de $D$. Ou seja, se $i$ está numa linha de $D$, então $i$ aparece na mesma linha de $\sigma D$, para $\sigma \in R(D)$.

Exemplo. Se $D = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1} \end{array}$, então

$$R(D) = S(1,3,5) = \{1, (13), (15), (35), (135), (153)\},$$

$$C(D) = S(1,2,4) = \{1, (12), (14), (24), (124), (142)\}.$$

Temos que $R(D)$ e $C(D)$ são subgrupos. Além disso, $R(D) \cap C(D) = \{1\}$. Isso pois, se $\pi \in R(D) \cap C(D)$. Então $i \in \{1, \dots, n\}$, temos que $\pi(i)$ deve ficar na mesma linha e na mesma coluna que $i$ aparece em $D$. Daí $\pi(i) = i$, e portanto, $\pi = 1$.

Define-se

$$e_D = \sum_{\sigma \in R(D)} \sum_{\tau \in C(D)} (-1)^{\tau} e_{\sigma\tau} \in \mathbb{Q}S_n.$$

Exemplo. Tomando a partição $(1,\dots,1)$, e tomando o diagrama

$$D = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline\end{array},$$

temos que $R(D) = 1$ e $C(D) = S_n$. Daí

$$e_D = \sum_{\sigma \in R(D)} \sum_{\tau \in C(D)} (-1)^\tau e_{\sigma\tau} = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^\tau e_\tau.$$

Tomando a partição $(n)$ de $n$, e tomando o diagrama

$$D' = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline\end{array},$$

temos $R(D') = S_n$ e $C(D') = 1$. Daí

$$e_{D'} = \sum_{\sigma \in S_n} e_\sigma.$$

Exemplo. Tome $(2,1)$ de $3$, e $D = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$, então

$$e_D = (e_1 + e_{(12)})(e_1 - e_{(13)}) =$$
$$= e_1 - e_{(13)} + e_{(12)} - e_{(132)}.$$

Se $\sigma\tau = \sigma'\tau'$, com $\sigma, \sigma' \in R(D)$ e $\tau, \tau' \in C(D)$, então $\sigma = \sigma'$ e $\tau = \tau'$. De fato,

$$(\sigma')^{-1}\sigma = \tau'\tau^{-1} \in R(D) \cap C(D) = 1,$$

daí $\sigma = \sigma'$ e $\tau = \tau'$.

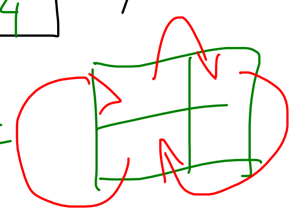
Portanto, $e_D \neq 0$, e se $e_\pi$ aparece na decomposição de $e_D$ na base $\{e_\pi \mid \pi \in S_n\}$, então o seu coeficiente é $+1$ ou $-1$.

Temos ação à direita em $S_n$ sobre um diagrama da seguinte forma: dado $\pi \in S_n$ e se

$$D = \begin{array}{|c|c|}\hline i_1 & i_2 \;\cdots\; i_{\lambda_1} \\ \hline i_{\lambda_1+1} & \cdots \; i_{\lambda_1+\lambda_2} \\ \hline \vdots & \\ \hline \end{array} \quad \text{então} \quad D\pi = \begin{array}{|c|c|}\hline i_{\pi^{-1}(1)} & i_{\pi^{-1}(2)} \;\cdots\; i_{\pi^{-1}(\lambda_1)} \\ \hline i_{\pi^{-1}(\lambda_1+1)} & \cdots \; i_{\pi^{-1}(\lambda_1+\lambda_2)} \\ \hline \vdots & \\ \hline \end{array}$$

Vamos chamar o elemento $i_m$ de m-ésima entrada de $D$. Então a m-ésima entrada de $D\pi$ é $i_{\pi^{-1}(m)}$.

Exemplo. Dado $T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$, $\pi = (1\,2\,3)$.

$T\pi =$ 

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}\,\pi = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 2 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array}\,\pi = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

**Lema.** Dados $\sigma, \pi \in S_n$, vale que $(\sigma D)\pi = \sigma(D\pi)$.

*Demonstração.* A m-ésima entrada $\sigma(D\pi)$ é $\sigma$ aplicado na m-ésima entrada de $D\pi$. A m-ésima entrada do $D\pi$ é $i_{\pi^{-1}(m)}$. Daí a m-ésima entrada de $\sigma(D\pi)$ é $\sigma(i_{\pi^{-1}(m)})$. Por outro lado, a $m$-ésima entrada de $(\sigma D)\pi$ é a $\pi^{-1}(m)$-ésima entrada de $\sigma(D)$. A $\pi^{-1}(m)$-ésima entrada é $\sigma$ aplicado na $\pi^{-1}(m)$-ésima entrada de $D$, que é $i_{\pi^{-1}(m)}$. Daí a $m$-ésima entrada de $(\sigma D)\pi$ é $\sigma(i_{\pi^{-1}(m)})$. $\square$

**Lema.** Dados $\sigma, \pi \in S_n$. Então, existe $\sigma' \in S_n$ tal que $\sigma D = D\sigma'$. Além disso,

$$\pi\sigma\pi^{-1}(\pi D) = \pi D\sigma'.$$

$\square$

**Corolário.** Seja $\pi \in S_n$. Então $R(\pi D) = \pi R(D)\pi^{-1}$, e $C(\pi D) = \pi C(D)\pi^{-1}$. Além disso,

$$e_{\pi D} = e_\pi e_D e_{\pi^{-1}}.$$

**Demonstração.** Seja $\sigma \in R(D)$. Então existe $\sigma'$ tal que $\sigma D = D\sigma'$. Como $\sigma \in R(D)$, temos que $\sigma'$ permuta elementos entre as mesmas linhas. Daí $(\pi\sigma\pi^{-1})(\pi D) = \pi D \cdot \sigma'$ preserva linhas, ou seja, $\pi\sigma\pi^{-1} \in R(\pi D)$. $\square$

**Corolário.** $\mathbb{Q}S_n \cdot e_D \cong \mathbb{Q}S_n \cdot e_{\pi D}$, $\forall \pi \in S_n$. $\square$

Definamos a seguinte ordem entre partições: $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) > (\lambda_1', \ldots, \lambda_r')$ se o primeiro $i$ tal que $\lambda_i \neq \lambda_i'$, vale $\lambda_i > \lambda_i'$.

**Lema.** Sejam $D$ e $D'$ diagramas associados a partições $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ e $(\lambda_1', \ldots, \lambda_r')$. Se

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) > (\lambda_1', \ldots, \lambda_r'),$$

então $e_{D'} \cdot e_D = 0$.

**Demonstração.** Provaremos que existem $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ na mesma coluna de $D'$ que estão na mesma linha de $D$. Assumindo que existe tal par, seja $t = (i\ j)$. Temos que $t \in C(D') \cap R(D)$. Então

$$e_{D'} \cdot e_D = e_{D'} \cdot e_t e_D = -e_{D'} e_D = 0.$$

Assuma o contrário, que dois elementos na coluna de $D'$ está em linhas distintas de $D$. Então, como $D$ tem $\lambda_1$ elementos na primeira linha, e esses devem estar em colunas distintas de $D'$. Daí $\lambda_1' \geq \lambda_1$. Mas, como $D > D'$, deve valer que $\lambda_1 = \lambda_1'$. Agora, a menos de trocar $D$ por algum $\sigma D$, podemos supor que $D$ e $D'$ possuem a primeira linha coincidentes.

Daí, podemos considerar os diagramas menores, apagando a primeira linha, e continuar o argumento por indução. $\square$

**Lema.** Seja $\pi \in S_n$. Então $\pi = \sigma\tau$, com $\sigma \in R(D)$ e $\tau \in C(D)$ $\iff$ dois pontos na mesma coluna de $\pi D$ estão em linhas distintas de $D$.

**Demonstração.** ($\Rightarrow$) Se $i, j$ está na mesma linha de $D$, então $i$ e $j$ está na mesma linha do $\sigma D$. Temos que

$$\pi D = \sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma D),$$

e $\sigma\tau\sigma^{-1} \in C(\sigma D)$. Então, $i$ e $j$ estarão em colunas distintas em $\sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma D) = \pi D$.