Anéis Semissimple (parte III)

Def. Os ideais B_L do Teorema anterior são denominados componentes simples de R.

Proposição. Sejam R um anel semissimples com 1, e $B \subseteq R$ um ideal bilateral. Então B é soma de alguns componentes simples.

$R = B_1 \oplus \cdots \oplus B_r$

Demonstração. Seja $B' = \sum\{B_i \subseteq B \mid i=1,\dots,r\}$. Então, escreva $B = B' \oplus B''$, em que $B'' \subseteq R$ é um ideal à esquerda.

Se $B'' \neq 0$, então existe $L \subseteq B''$ ideal à esquerda minimal. Daí

$$B_L = LR \subseteq B,$$

e isso implica $L \subseteq B_L \subseteq B'$, por construção.

Mas daí $B' \cap B'' \neq 0$, uma contradição. Segue que $B''=0$, e portanto $B = B' = (\text{soma de alguns } B_L)$. $\square$

Corolário. Se R é um anel semissimples com 1, e é expresso como soma direta de ideais bilaterais que são anéis simples, então esses são exatamente as componentes simples de R. $\square$

Série de Composição

Def. Uma *série de composição* de um R-módulo M é uma sequência de R-submódulos
$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_r = M$$
de modo que M_i / M_{i-1} é irredutível, $\forall i = 1, \dots, r$.

Teorema (Jordan-Hölder). Seja M um R-módulo. Então duas séries de composição para M admitem o mesmo comprimento e quocientes sucessivos são isomorfos, a menos de uma permutação.

Lema. Sejam $L, Q, N \subseteq M$ R-submódulos, com $L \subseteq Q$. Então $(Q+N)/(L+N) \cong Q/L+Q\cap N$.

Demonstração. Considere $\pi : Q \longrightarrow (Q+N)/(L+N)$, tal que $\pi(q) = q + (L+N)$ é sobrejetivo. Além disso,
$$\operatorname{Ker} \pi = Q \cap (L+N) = L + Q \cap N. \qquad \square$$

Teorema (Schreier). Seja M um R-módulo e
$$0 = N_0 \subseteq \cdots \subseteq N_r = M, \qquad 0 = N_0' \subseteq \cdots \subseteq N_s' = M$$
duas cadeias de submódulos.

Então existe refinamento das sequências de modo que:

(i) sequências refinadas possuem o mesmo comprimento,

(ii) quocientes sucessivos são isomorfos, a menos de permutação.

Demonstração. Defina, para $i = 0, \dots, r$, $j = 0, \dots, s$,

$$N_{ij} = N_i + N_{i+1} \cap N'_j, \qquad N'_{ji} = N'_j + N'_{j+1} \cap N_i.$$

Daí

$$\frac{N_{i,j+1}}{N_{i,j}} = \frac{N_i + N_{i+1} \cap N'_{j+1}}{N_i + N_{i+1} \cap N'_j} \simeq \frac{N_{i+1} \cap N'_{j+1}}{N_{i+1} \cap N'_j + N_i \cap N'_{j+1}} \simeq \frac{N'_j + N'_{j+1} \cap N_{i+1}}{N'_j + N'_{j+1} \cap N_i} = \frac{N'_{j,i+1}}{N'_{j,i}} \qquad \blacksquare$$

$$(Q+N)/(L+N) \simeq Q/L+Q \cap N$$

$$N = N_i$$

$$Q = N_{i+1} \cap N'_{j+1}$$

$$L = N_{i+1} \cap N'_j$$

Def. Um R-módulo M é dito ser noetheriano se toda família não-vazia de R-submódulos admite um elemento maximal.

Exercício. Seja M um R-módulo e $N \subseteq M$ submódulo. Então M é noetheriano se e só se N e M/N são noetheriano.

Obs. vale se trocar noetheriano por artiniano.

Proposição. Um R-módulo M admite série de composição se e só se M é artiniano e noetheriano.

Demonstração. Assuma que M é artiniano e noetheriano. Então existe $M_1 \subseteq M$ irredutível. Daí, existe M_2 tal que $M_1 \subseteq M_2$ e M_2/M_1 é irredutível. Podemos continuar o processo obtendo

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots$$

e o processo termina, pois M é noetheriano.

Reciprocamente, assuma que M admite série de composição de tamanho n, $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$. Provemos que M é artiniano e noetheriano por indução em n. Se $n=1$, então M é irredutível, e portanto, noetheriano e artiniano. Assumindo $n>1$, temos que

$$0 = M_1/M_1 \subsetneq M_2/M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n/M_1 = M/M_1$$

é série de composição para M/M_1, de comprimento $n-1$. Daí M/M_1 é artiniano e noetheriano, por indução, e M_1 também é (pois é irredutível). Daí M é artiniano e noetheriano, por exercício anterior. $\square$

Sejam G um grupo finito, V um $\mathbb{F}$-espaço vetorial de dimensão finita e $\rho: G \to GL(V)$.

Temos que V é um $\mathbb{F}G$-módulo artiniano e noetheriano, pois $1 \in \mathbb{F}G$ e $\dim_{\mathbb{F}} V < \infty$ (e portanto, qualquer $\mathbb{F}G$-submódulo também é um $\mathbb{F}$-subesp. vetorial).

Daí V admite série de composição

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_m = V.$$

Seja $\rho_i: G \to GL(V_i/V_{i-1})$ a representação irredutível obtida do $\mathbb{F}G$-módulo irredutível V_i/V_{i-1}. Daí, tomando uma base de V formada por uma base de V_1, $V_2, \ldots, V_m$ nessa ordem, obtemos que

$$[\rho(g)] = \begin{pmatrix} [\rho_1(g)] & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & [\rho_m(g)] \end{pmatrix}, \quad \forall g \in G.$$

Se conseguirmos outra base tal que vale

$$[\rho(g)] = \begin{pmatrix} [\rho_1'(g)] & & * \\ & \ddots & \\ & & [\rho_n'(g)] \end{pmatrix},$$

com ρ_i irredutível, então $m = n$ e $\rho_i \cong \rho'_{\sigma(i)}$, por Teorema de Jordan-Hölder.

Anéis Simples

Exemplo. Seja D anel de divisão. Então $M_n(D)$ é simples. Temos que $M_n(D) e_{ii}$ é ideal minimal à esquerda (D é semiprimo e $e_{ii} M_n(D) e_{ii} \cong D$ é anel de divisão). Temos também

$$M_n(D) = M_n(D) e_{11} \oplus \cdots \oplus M_n(D) e_{nn}.$$

Além disso, $M_n(D) e_{11}$ é um $e_{11} M_n(D) e_{11}$-módulo à direita. Além disso, todo D-módulo é livre e todo D-módulo finitamente gerado admite base e dimensão. Temos

$$\dim_{e_{11} M_n(D) e_{11}} M_n(D) e_{11} = n.$$

Além disso, $\operatorname{End}_{e_{11} M_n(D) e_{11}} \left(M_n(D) e_{11} \right) \cong M_n\left(e_{11} M_n(D) e_{11} \right) \cong M_n(D)$.

Teorema (da Densidade). Seja R um anel, M um R-módulo irredutível e $D = \mathrm{End}_R M$ (D é anel de divisão por Lema de Schur). Dados $v_1, \dots, v_m \in M$ que são D-linearmente independentes e dados quaisquer $w_1, \dots, w_m \in M$, existe $r \in R$ de modo que

$$r v_1 = w_1, \quad \dots, \quad r v_m = w_m.$$

Demonstração. Basta encontrar $r \in R$ tal que

$$r v_1 \neq 0 \quad e \quad r v_2 = \dots = r v_m = 0.$$

Provemos por indução em m. Se $m = 1$, então basta encontrar r t.q. $r v_1 \neq 0$. Se não existe tal r, então $R v_1 = 0$. Daí, ou $\mathbb{Z} v_1$ é submódulo de M, e daí $M = \mathbb{Z} v_1$. Isso implica $RM = R\mathbb{Z} v_1 = 0$, uma contradição.

Assuma então $m > 1$, e considere

$$I = \{ r \in R \mid r v_2 = \dots = r v_{m-1} = 0 \}.$$

Seja $W = \{ v \in M \mid r v = 0, \forall r \in I \}$, a hipótese de indução implica que

$$W = v_2 D \oplus \dots \oplus v_{m-1} D.$$

Basta encontrar $r \in I$ tal que $rv_1 \neq 0$ e $rv_n = 0$.
Se não existir, então $r \in I$ e $rv_n = 0$ implica $rv_1 = 0$. Daí, temos um R-homomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : I v_n &\longrightarrow I v_1 \\ r v_n &\longmapsto r v_1 \end{aligned}$$

bem definido. Ainda, por descrição de W, temos $Iv_1 \neq 0$ e $Iv_n \neq 0$. Daí $Iv_1 = Iv_n = M$.
Isso significa que $\psi \in End_R(M) = D$. Daí, existe $d \in D$ tal que

$$\forall r \in I, \quad rv_1 = \psi(rv_n) = rv_n d.$$

Ou seja, $r(v_1 - v_n d) = 0$, $\forall r \in I$, ou seja, $v_1 - v_n d \in W$, uma contradição. $\square$