MAT6681 - Representações de Grupos

Referências:

- Curtis, Reiner, "Representation theory of finite groups and associative algebras",
- Serre, "Linear representations of finite groups".

Prova 1: 31/maio
Prova 2: 26/julho

Formato da prova:

→ 60% - exercícios de lista
→ 10-15% - def. e enunciado de Teoremas
→ resto: exercícios "novos"

— Tempo de prova: 48 horas + ε.

Representações de Grupos

G será sempre um grupo finito, e $\mathbb{F}$ um corpo qualquer (às vezes $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

Def. Seja V um $\mathbb{F}$-esp. vetorial de dimensão finita. Uma representação de G em V é um homomorfismo de grupos $\rho: G \to GL(V)$. O grau da representação é definido por $\deg \rho := \dim_{\mathbb{F}} V$.

Fixando uma base $\{v_1, \dots, v_m\}$ de V, temos

$$GL(V) \cong GL_m(\mathbb{F}).$$

Então, para cada escolha de base, temos homomorfismo

$$\rho: G \to GL_m(\mathbb{F}).$$

Definição. $\rho: G \to GL(V)$ e $\rho': G \to GL(V')$ são isomorfas se existe um isomorfismo $\tau: V \to V'$ tal que

$$\tau \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \tau, \quad \forall g \in G.$$

Exemplos.

1. As representações de grau 1 são homomorfismos
$$\rho: G \to \mathbb{F}^\times.$$
A representação trivial é $G \to \mathbb{F}^\times$ tal que $g \mapsto 1$, $\forall g \in G$.

2. Seja V um espaço vetorial com base $\{v_g \mid g \in G\}$. Então temos a seguinte representação
$$\rho: G \to GL(V),$$
tal que $\rho(g) v_h = v_{gh}$, $\forall g, h \in G$.
Tal representação é denominada representação regular.

3. Assuma que G age num conjunto finito X, e seja V o $\mathbb{F}$-esp. vet. com base $\{v_x \mid x \in X\}$. Então, temos $\rho: G \to GL(V)$ via
$$\rho(g) v_x = v_{g \cdot x}, \quad g \in G,\ x \in X.$$

4. Seja $C_3 = \langle g \mid g^3 = 1 \rangle$. Temos representações da seguinte forma:
$$\rho_1: C_3 \to GL_3(\mathbb{F}), \quad \rho_1(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $\omega \in \mathbb{F}$, com $\omega \neq \omega^3 = 1$, então temos a representação

$$\rho_2 : C_3 \to GL_3(\mathbb{F}), \quad \rho_2(g) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \omega & \\ & & \omega^2 \end{pmatrix}.$$

$\to$ ρ_1 e ρ_2 são isomorfas (quem é T?).

Notação. Denota-se $\rho_g := \rho(g)$.

Def. Seja $\rho : G \to GL(V)$ uma rep. Seja $W \subseteq V$ um subespaço tal que $\rho_g(W) \subseteq W$, $\forall g \in G$. Dizemos que W é uma subrepresentação ou um G-subespaço (G-invariante, invariante por G, ...).

Obs. Se W é um G-subespaço, então obtemos uma representação $\rho_W : G \to GL(W)$ via restrição

$$\rho_W(g) := \rho(g)\big|_W .$$

Exemplo. Considere a representação regular, e seja $W = \mathrm{Span}\left\{ \sum_{g \in G} v_g \right\}$. Então W é uma subrepresentação isomorfa a representação trivial. Pois

$$\rho_h\left(\sum_{g \in G} v_g\right) = \sum_{g \in G} \rho_h v_g = \sum_{g \in G} v_{hg} = \sum_{g \in G} v_g, \quad \forall h \in G.$$

Dados $\rho_1 : G \to GL(V_1)$ e $\rho_2 : G \to GL(V_2)$, podemos construir uma representação em $V_1 \oplus V_2$ da seguinte forma:

$$\rho : G \to GL(V_1 \oplus V_2)$$

tal que $\rho(g)(v_1 + v_2) = \rho_1(g)(v_1) + \rho_2(g)(v_2)$, $\forall v_i \in V_i$, $\forall g \in G$.

Escolhendo uma base de $V_1 \oplus V_2$ obtida de bases de V_1 e V_2, temos que

$$[\rho(g)] = \begin{pmatrix} [\rho_1(g)] & \\ & [\rho_2(g)] \end{pmatrix}.$$

Def. Uma representação $\rho : G \to GL(V)$ é dito ser *irredutível* se os seus únicos G-subespaços são 0 e V.

Def. Uma representação é dita ser *completamente redutível* se para todo G-subespaço $W \subseteq V$, existe um G-subespaço W_0 tal que $V = W \oplus W_0$.

Lema. Uma subrepresentação de uma representação completamente redutível é completamente redutível.

Prova. Seja $\rho: G \to GL(V)$ completamente redutível e $W \subseteq V$ uma subrep. Seja $U \subseteq W$ uma subrep. Então existe U_0 G-invariante tal que $V = U \oplus U_0$. Defina $U_0' := U_0 \cap W$. Então U_0' é G-inv. e vale que $W = U_0 \oplus U_0'$. □

Corolário. Toda representação completamente redutível é soma direta de rep. irredutíveis. □

Teorema (de Maschke). Sejam G um grupo finito e $\rho: G \to GL(V)$ uma representação. Assuma que $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$ ou que $\operatorname{char} \mathbb{F} \nmid |G|$. Então ρ é completamente redutível.

Prova. Seja $W \subseteq G$ um G-subesp. Seja U um complemento qualquer de W, ou seja, $V = W \oplus U$. Seja $\pi: V \to V$ tal que $\pi(w+u) = w$. Defina

$$\pi_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_g \pi \rho_g^{-1}.$$

Temos que:

(i) dado $w \in W$, temos que

$$\pi_0(w) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho_g \pi \rho_g^{-1}(w) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho_g \rho_g^{-1}(w)$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} w = w.$$

Ou seja $\pi_0(w) = w$, $\forall\, w \in W$.

(ii) $\pi_0(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho_g \big(\underbrace{\pi \rho_g^{-1}(v)}_{\in W}\big) \in W$.

Daí $\pi_0(V) \subseteq W$ (mais que isso, $\pi_0(W) = W$).

Daí $V = \pi_0(V) \oplus \underbrace{\ker \pi_0}_{(1-\pi_0)(V)} = W \oplus \ker \pi_0$.

Provemos que $\ker \pi_0$ é G-inv. Temos que

$\forall h \in G$, $\rho_h \pi_0 \rho_h^{-1} = \rho_h \left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho_g \pi \rho_g^{-1}\right)\rho_h^{-1}$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho_{hg}\pi\rho_{hg}^{-1} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_g\pi\rho_g^{-1} = \pi_0.$$

Daí $\rho_h \circ \pi_0 = \pi_0 \circ \rho_h$, $\forall\, h \in G$.

Dado $w_0 \in \operatorname{Ker} \pi_0$ e $g \in G$, temos

$$\pi_0(\rho_g w_0) = \rho_g \pi_0(w_0) = 0$$

$$\Rightarrow \rho_g w_0 \in \operatorname{Ker} \pi_0.$$

Daí $\operatorname{Ker} \pi_0$ é G-invariante. $\square$

Observação. No caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$: Seja $\langle \cdot , \cdot \rangle$ um produto interno em V. Defina

$$\langle v, w \rangle_G := \sum_{g \in G} \langle \rho_g v, \rho_g w \rangle.$$

Temos que $h \in G$, $\langle \rho_h v, \rho_h w \rangle_G = \langle v, w \rangle_G$.

Se $W \subseteq V$ um G-subespaço, então $W^\perp$ é inv. por todo ρ_g. Daí $W^\perp$ é G-subesp. e vale $V = W \oplus W^\perp$.