MAT3211 Álgebra Linear (2021)
Lista 5

4. Produto interno

4.1 Defina o mapa em $\mathbb{R}^2$:

$$g((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2.$$

Prove que g é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

4.2 Considere o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$.
- (a) Determine m de modo que os vetores $(1 + m, 2)$ e $(3, m - 4)$ sejam ortogonais.
- (b) Determine todos os vetores de $\mathbb{R}^2$ que são ortogonais a $(2, 1)$.

4.3 Seja $\beta = \{(1, 2), (2, 1)\}$. Use o processo de Gram-Schmidt para achar uma base β' de $\mathbb{R}^2$ em relação ao produto interno usual.

4.4 Seja $\beta = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 2, 0)\}$. Use o processo de Gram-Schmidt para achar uma base ortonormal β' de $\mathbb{R}^3$, em relação ao produto interno usual.

4.5 Determine uma base ortonormal de cada um dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$, em relação ao produto interno usual, utilizando o processo de Gram-Schmidt:
- (a) $W = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 3, 4)]$.
- (b) $W = [(2, 0, 0, 0), (1, 3, 3, 0), (3, -3, -3, 0)]$.

4.6 Determine uma base ortonormal (em relação ao produto interno canônico) para o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}.$$

4.7 Seja $W = [(1, 0, 1), (1, 1, 0)]$. Considere $W^\perp$ em relação ao produto interno canônico de $\mathbb{R}^3$. Encontre uma base ortonormal para W e $W^\perp$.

4.8 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$. Encontre uma base ortonormal para $(\operatorname{Ker} T)^\perp$, em relação ao produto interno canônico de $\mathbb{R}^3$.

4.9 Seja

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}.$$

- (a) Verifique que S é um conjunto ortonormal.
- (b) Encontre $v \in \mathbb{R}^4$ de modo que, segundo o produto interno canônico de $\mathbb{R}^4$, o conjunto $\beta = S \cup \{v\}$ seja uma base ortonormal.
- (c) Determine $[(1, 2, 3, 4)]_\beta$.
- (d) Dado $v = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, determine $[v]_\beta$.

4.10 Seja $\alpha = \{w_1, w_2, w_3\}$ uma base de um espaço vetorial real V, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam u e v em V tais que

$$[u]_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad [v]_\alpha = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Se $\langle u, v \rangle = 2$, a base α é ortonormal?

5. Tipos especiais de operadores

5.1 Ache valores a e b tais que $\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ seja uma matriz ortogonal.

5.2 Seja A uma matriz quadrada. Mostre que $A + A^T$ é simétrica, em que A^T denota a transposta usual da matriz A.

5.3 Seja $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canônico, e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (-x + y, x - 2y + z, y - z)$.

(a) Mostre que T é um operador auto-adjunto, mas não ortogonal.

(b) Se $v = (2, -1, 5)$ e $w = (3, 0, 1)$, verifique que $\langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle$.

(c) Exiba uma base de autovetores de T e verifique que é uma base ortogonal. A partir desta base, escreva uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

5.4 Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exiba uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, constituído de autovetores de T.

5.5 Seja A uma matriz cujas colunas constituem um conjunto de vetores ortonormais. Prove que A é ortogonal.