MAT3211 Álgebra Linear (2021)
Lista 4

1. Diagonalização

1.1 Para cada uma das transformações lineares a seguir, determine se a mesma é diagonalizável. Em caso positivo, encontre uma base do espaço formado por autovetores da transformação.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, 0)$.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2y, x)$.

(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + 2y, 3y)$.

(d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$.

(e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, z, y)$.

(f) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $T(x, y, z, w) = (x + y + z + w, y + z + w, z + w, w)$.

1.2 Determine se as seguintes matrizes A são diagonalizáveis. Em caso positivo, encontre M tal que $M^{-1}AM$ é uma matriz diagonal.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1.3 Utilize a forma diagonal pra encontrar A^n, em que $n \in \mathbb{N}$, nos seguintes casos:

(a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1.4 Determine se as seguintes matrizes A são diagonalizáveis. Em caso positivo, encontre uma matriz diagonal similar a A.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \pi & \sqrt{7} & 2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2. Polinômio minimal

2.1 Encontre todas as possibilidades para o polinômio minimal de um operador $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ com polinômio característico:

(a) $p_T(X) = (X-3)^3(X-2)^2$.

(b) $p_T(X) = (X-1)(X-2)(X-3)(X-4)(X-5)$.

(c) $p_T(X) = (X-2)^5$.

2.2 Determine o polinômio minimal das seguintes matrizes:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{pmatrix}$

3. Forma de Jordan

3.1 Determine a forma de Jordan de uma matriz real 5×5 cujo polinômio característico é $(X-2)^3(X-7)^2$ e cujo polinômio minimal é $(X-2)^2(X-7)$.

3.2 Determine o número de matrizes não semelhantes A de tamanho 4×4 tais que seu polinômio minimal seja $(X+1)^2$.

3.3 Determine a forma de Jordan das seguintes matrizes:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{pmatrix}$