MAT3211 Álgebra Linear (2021)
Lista 3

6. Transformação Linear

6.1 Determine quais das seguintes funções são aplicações lineares:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = xy$.

(c) $h : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, dada por $g(M) = \det(M)$.

(d) $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $N(x) = |x|$ (módulo do número real x).

6.2 Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$.

6.3 Resolva os items a seguir:

(a) Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$.

(b) Ache $T(1, 0)$ e $T(0, 1)$.

(c) Qual a transformação linear $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $S(3, 2, 1) = (1, 1)$, $S(0, 1, 0) = (0, -2)$ e $S(0, 0, 1) = (0, 0)$?

(d) Calcule $P = S \circ T$.

6.4 Determinar as matrizes das seguintes transformações lineares em relação às bases canônicas dos respectivos espaços:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + y, z)$,

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x + y, x, x - y)$,

(c) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x, y, z, w) = 2x + y - z + 3w$,

(d) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x) = (x, 2x, 3x)$.

6.5 Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y, z) = (x + z, y - 2x)$. Determinar $[F]^{\beta}_{\beta'}$, em que $\beta = \{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, -1)\}$ e $\beta' = \{(1, 5), (2, -1)\}$.

6.6 Para cada uma das transformações lineares abaixo determinar uma base e a dimensão do núcleo e da imagem:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x, y, z) = x + y - z$.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (2x, x + y)$.

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $T(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z, 2x - y + z, -y)$.

(d) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por $T(X) = MX + X$, em que

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6.7 Sejam $\alpha = \{(1, -1), (0, 2)\}$, $\beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente e

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Determine T

(b) Se $S(x, y) = (2y, x - y, x)$, determine $[S]^{\alpha}_{\beta}$.

(c) Ache uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]^\alpha_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Determine $\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Im} T$, $\operatorname{Ker} S$, $\operatorname{Im} S$.

6.8 Seja $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com base

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Se $T : V \to \mathbb{R}^2$ é dada por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+d, b+c)$, ache $[T]^\beta_\alpha$, em que α é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

(b) Se $S : \mathbb{R}^2 \to V$ é dada por

$$[S]^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

determine S.

6.9 Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$.

(a) Determine uma base do núcleo de T.

(b) Dê a dimensão da imagem de T.

(c) T é sobrejetora? Justifique.

6.10 Sejam $\alpha = \{(0, 2), (2, -1)\}$ e $\beta = \{(1, 1, 0), (0, 0, -1), (1, 0, 1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Se

$$[S]^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

determine a expressão para $S(x, y)$.

6.11 Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformação linear tal que $F(1, 0) = (2, 1)$ e $F(0, 1) = (1, 4)$.

(a) Determinar $F(2, 4)$.

(b) Determinar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x, y) = (2, 3)$.

(c) Provar que F é bijetor (isto é, sobrejetor e injetor).

6.12 Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $F(1, 0, 0) = (1, 1, 0)$, $F(0, 0, 1) = (0, 0, 2)$ e $F(0, 1, 0) = (1, 1, 2)$. Determinar uma base de cada um dos seguintes subespaços vetoriais: $\operatorname{Ker}(F)$, $\operatorname{Im}(F)$, $\operatorname{Ker}(F) \cap \operatorname{Im}(F)$.

7. Autovalor e Autovetor

7.1 Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (y, 2y)$. Mostre que $\lambda = 2$ é um autovalor de T e vetores da forma $(x, 2x)$ são os autovetores correspondentes.

7.2 Ache os autovalores e autovetores correspondentes das transformações lineares dadas:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2y, x)$.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$.

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$.

(d) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = A^t$ (isto é, a transposta da matriz).

7.3 Ache os autovalores e autovetores correspondentes das matrizes seguintes:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 14 \\ 2 & -7 & 14 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix}$