# MAT3211 Álgebra Linear (2021)
# Lista 2

## 3. Soma e Intersecção de Subespaços e Conjunto gerador

**3.1** Sejam $U$, $V$ e $W$ os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x,y,z) \mid x = z\},$$
$$V = \{(x,y,z) \mid x = y = 0\},$$
$$W = \{(x,y,z) \mid x + y + z = 0\}.$$

Verifique que $U + V = \mathbb{R}^3$, e $U + W = \mathbb{R}^3$ e $V + W = \mathbb{R}^3$. Em alguns dos casos a soma é direta?

**3.2** Exiba um conjunto de geradores para cada um dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:
(a) $U = \{(x,y,z) \mid x - 2y = 0\}$
(b) $V = \{(x,y,z) \mid x + z = 0, x - 2y = 0\}$
(c) $W = \{(x,y,z) \mid x + 2y - 3z = 0\}$
(d) $U \cap V$
(e) $V + W$.

**3.3** Considere o subespaço de $\mathbb{R}^4$

$$S = [(1,1,-2,4),(1,1,-1,2),(1,4,-4,8)].$$

(a) O vetor $\left(\frac{2}{3},1,-1,2\right)$ pertence a $S$?
(b) O vetor $(0,0,1,1)$ pertence a $S$?

**3.4** Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,-1,1)$ e $v_3 = (1,1,1)$. Vale que $[v_1,v_2,v_3] = \mathbb{R}^3$? Por que?

**3.5** Seja $U$ o subespaço de $\mathbb{R}^3$, gerado por $(1,0,0)$ e $W$ o subespaço de $\mathbb{R}^3$, gerado por $(1,1,0)$ e $(0,1,1)$. Mostre que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

## 4. Base e Dimensão

**4.1** Quais os subconjuntos abaixo do $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes:
(a) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(2,3,5)\}$
(b) $\{(1,1,1),(1,0,1),(1,0,-2)\}$
(c) $\{(0,0,0),(1,2,3),(4,1,-2)\}$
(d) $\{(1,1,1),(1,2,1),(3,2,-1)\}$

**4.2** Escreva uma base para o espaço vetorial das matrizes $m \times n$, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Qual a dimensão deste espaço?

**4.3** Achar uma base e a dimensão do seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$: $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0, x + 2y + w = 0\}$.

**4.4** No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos os seguintes subespaços:

$$U = \{(x,y,z) \mid x = 0\}, \quad V = \{(x,y,z) \mid y - 2z = 0\}, \quad W = [(1,1,0),(0,0,2)].$$

Determinar uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços: $U$, $V$, $W$, $U \cap V$, e $U + V$.

## 5. Coordenadas e Mudança de Base

**5.1** Determinar as coordenadas do vetor $u = (4, -5, 3) \in \mathbb{R}^3$, em relação às seguintes bases:
(a) canônica, isto é, $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
(b) $\{(1,1,1),(1,2,0),(3,1,0)\}$
(c) $\{(1,2,1),(0,3,2),(1,1,4)\}$

**5.2** Sejam $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$, $\beta_1 = \{(-1,1),(1,1)\}$, $\beta_2 = \{(\sqrt{3},1),(\sqrt{3},-1)\}$, e $\beta_3 = \{(2,0),(0,2)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.
(a) Ache as matrizes de mudança de base:
**i)** $[I]_{\beta}^{\beta_1}$ **ii)**$[I]_{\beta_1}^{\beta}$ **iii)** $[I]_{\beta_2}^{\beta}$ **iv)** $[I]_{\beta_3}^{\beta}$
(b) Quais as coordenadas do vetor $v = (3, -2)$ em relação à base:
**i)** $\beta$ **ii)** $\beta_1$ **iii)** $\beta_2$ **iv)** $\beta_3$.
(c) As coordenadas de um vetor $v$ em relação à base $\beta_1$ são dadas por $[v]_{\beta_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Quais são as coordenadas de $v$ em relação à base:
**i)** $\beta$ **ii)** $\beta_2$ **iii)** $\beta_3$.

**5.3** Se $[I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, ache:
(a) $[v]_{\beta'}$, em que $[v]_{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (b) $[w]_{\beta}$, em que $[w]_{\beta'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

**5.4** A matriz de mudança de uma base $\beta$ de $\mathbb{R}^2$ para a base $\{(1,1),(0,2)\}$ desse mesmo espaço é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determinar a base $\beta$.

**5.5** Considere as bases $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\beta' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ assim relacionadas:
$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 - v_2 - v_3, \\ v_2' &= \phantom{v_1 - {}} 2v_2 + 3v_3, \\ v_3' &= 3v_1 \phantom{{}- v_2} + v_3. \end{aligned}$$
(a) Determinar as matrizes de mudança de $\beta$ para $\beta'$, e de $\beta'$ para $\beta$.
(b) Se um vetor $u$ de $\mathbb{R}^3$ apresenta as coordenadas 1, 2 e 3, em relação a base $\beta$, quais as coordenadas de $u$ relativamente a $\beta'$?

**5.6** Considere o seguinte subespaço vetorial do espaço $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, das matrizes quadradas de ordem 2: $U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \mid x - y - z = 0 \right\}$.
(a) Mostrar que os seguintes subconjuntos de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ são bases de $U$:
$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \beta' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
(b) Achar a matriz de mudança de base de $\beta$ para $\beta'$, e de $\beta'$ para $\beta$.
(c) Achar uma base $\beta''$ de $U$, de tal maneira que a matriz de mudança de base de $\beta''$ para $\beta$ seja:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$