

MAT3211 Álgebra Linear (2021)

Lista 1

1. ESPAÇO VETORIAL

1.1 Mostre que \mathbb{R}^n , com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar, é um espaço vetorial real.

1.2 Seja $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Em cada um dos itens, responda se, com as operações definidas, (V, \oplus, \odot) é um espaço vetorial real. Por que?

(a) Para $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$, defina

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0),$$

$$\lambda \odot (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Para $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$, defina

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + y_1 - 1, x_2 + y_2),$$

$$\lambda \odot (x_1, y_1) = (\lambda x_1 + \lambda - 1, \lambda y_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Qual elemento é o vetor nulo?

2. SUBESPAÇO VETORIAL

2.1 Mostre que os seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^4 são subespaços vetoriais:

(a) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z - w = 0\}$.

(b) $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - w = 0 \text{ e } z = 0\}$.

2.2 Verifique que os seguintes subconjuntos não são subespaços vetoriais de \mathbb{R}^3 :

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y + z = 0\}$

(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq y \leq z\}$

(d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Q}\}$

2.3 Quais dos seguintes conjuntos W são subespaços de \mathbb{R}^3 ? Justifique.

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$

(b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$

(c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \text{ é irracional}\}$

(d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3z = 0\}$

2.4 Fixe $n \in \mathbb{N}$. Quais dos seguintes conjuntos abaixo são subespaços do espaço $P_n(\mathbb{R})$, dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a n ? Justifique.

(a) $W = \{f(X) \in P_n(\mathbb{R}) \mid \text{gr}(f) > 2\}$

(b) $W = \{f(X) \in P_n(\mathbb{R}) \mid f(0) = 2f(1)\}$

(c) $W = \{f(X) \in P_n(\mathbb{R}) \mid f(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$

(d) $W = \{f(X) \in P_n(\mathbb{R}) \mid f(X) + f'(X) = 0\}$