Forma linear, bilinear e Quadrática

Definição. Seja V um espaço vetorial. Um funcional linear de V é uma transformação linear $V \to \mathbb{R}$.

Exemplo.

1. Seja $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = 2x - 3y + \sqrt{5}z$ é um funcional linear.
   Podemos representá-lo via

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Note que vale também que

$$f(x,y,z) = \langle (x,y,z), (2,-3,\sqrt{5}) \rangle,$$

em que esse é o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

2. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$T(x,y) = (x-y, \sqrt{2}x - \sqrt{3}y, -x+y).$$
Então, os mapas $T_1, T_2, T_3: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dadas por

$$T_1(x,y) = x - y$$
$$T_2(x,y) = \sqrt{2}x - \sqrt{3}y$$
$$T_3(x,y) = -x + y$$

São funcionais lineares.

Teorema. Denote

$$V^* = \{ f : V \to \mathbb{R} \text{ funcional linear} \}.$$

Então V^* é um esp. vetorial. Se $\dim V < \infty$, então

$$\dim V^* = \dim V.$$

Definição. Seja V um esp. vet. Uma forma bilinear é um mapa $B : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que

(i) $B(\lambda v_1 + v_2, v_3) = \lambda B(v_1, v_3) + B(v_2, v_3)$,

(ii) $B(v_3, \lambda v_1 + v_2) = \lambda B(v_3, v_1) + B(v_3, v_2)$,

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v_1, v_2, v_3 \in V$.

Exemplos.

1. Um produto interno real é uma forma bilinear.

2. Seja $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $p(x,y) = xy$. Então p é uma forma bilinear de $\mathbb{R}$.

3. Sejam $f, g : V \to \mathbb{R}$ funcionais lineares. Então

$$(v, w) \in V \times V \to f(v) g(w) \in \mathbb{R}$$

é uma forma bilinear. Essa construção é denominada de produto tensorial entre f e g, e denota-se por $f \otimes g$. Então

$$f \otimes g : V \times V \to \mathbb{R},$$

e $f \otimes g(v, w) = f(v) g(w)$.

4. Sejam $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dados por

$$f(x,y) = x + 3y$$
$$g(x,y) = -x + \sqrt{7}\, y.$$

Então, $f\otimes g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f\otimes g((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1+3y_1)(-x_2+\sqrt{7}y_2) =$$

$$= -x_1x_2 + \sqrt{7}\,x_1y_2 - 3y_1x_2 + 3\sqrt{7}\,y_1y_2.$$

$$=: B((x_1,y_1),(x_2,y_2)).$$

Note que

$$B((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1 \quad y_1)\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{7} \\ -3 & 3\sqrt{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Daí, uma forma bilinear pode ser representado na forma matricial.

5. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Então temos forma bilinear $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$B((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1 \quad y_1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 \quad y_1)\begin{pmatrix} x_2+2y_2 \\ 3x_2+4y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1x_2 + 2x_1y_2 + 3y_1x_2 + 4y_1y_2.$$

é uma forma bilinear. A matriz A é a matriz da forma bilinear.

Definição. Uma forma bilinear é simétrica se

$$B(u,v) = B(v,u), \quad \forall u,v \in V.$$

Exemplo. Um produto interno real é uma forma bilinear simétrica.

Definição. Seja $B: V \times V$ uma forma bilinear simétrica. A forma quadrática associada é o mapa

$$Q: V \to \mathbb{R}$$

definida por $Q(v) = B(v,v)$.

Exemplo. O mapa $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por

$$Q(x,y) = x^2 + 10xy - y^2$$

é quadrática. A forma bilinear associada é tal que a sua matriz

$$[B] = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

De fato,

$$B\big((x,y),(x,y)\big) = (x \ \ y)\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= (x \ \ y)\begin{pmatrix} x+5y \\ 5x-y \end{pmatrix}$$

$$= x(x+5y) + y(5x-y) = x^2 + 5xy + 5yx - y^2$$

$$= x^2 + 10xy - y^2.$$

Teorema. Uma forma bilinear é simétrica se e só se a sua matriz associada é simétrica.

Forma quadrática $\Rightarrow$ existe uma forma bilinear simétrica $\Rightarrow$ matriz da forma é simétrica $\Rightarrow$ matriz simétrica é diagonalizável!

Teorema. Seja $Q: V \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática. Então, existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ e uma base γ de V que é ortonormal, tal que,

Se $[v]_\gamma = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, então

$$Q(v) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

Exemplo. Descreva a figura geométrica no plano dada pela equação

$$(*) \quad 2x^2 + 6xy + 2y^2 + 1 = 0.$$

Considere $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x,y) = 2x^2 + 6xy + 2y^2$. A matriz simétrica associada é

$$Q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz $[Q] = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ são 5 e -1, e uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ constituído por autovetores de $[Q]$ é $\gamma = \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\}$.

Tomando

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{cases}$$

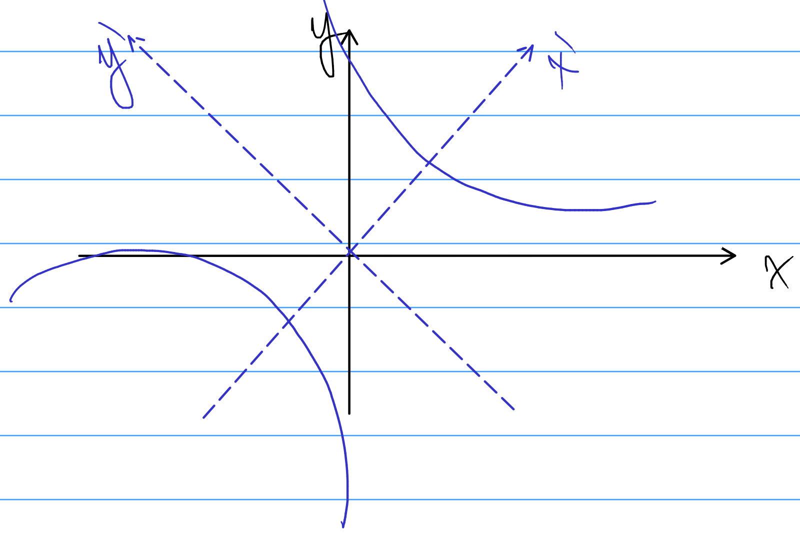
então vale que

$$Q(x',y') = (x', y')\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 5(x')^2 - (y')^2.$$

Portanto, $(*)$, nas novas coordenadas, fica

$$5(x')^2 - (y')^2 - 1 = 0.$$

Portanto, $(*)$ é uma hipérbole.



07/12 - sem aula

09/12 e 14/12 — revisão (pelo Gustavo)

P2: das 19:00 de 16/12 até às 23:59 de 18/12