Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Vamos construir bases ortonormais de um esp. vet.

Seja V um esp. vet. com produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, e assuma que $\beta = \{v_1, v_2\}$ é uma base de V. Vamos construir uma base ortogonal de V:

$v_1' = v_1$, e

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'.$$

Então $v_2' \neq 0$ (pois $\{v_1, v_2\}$ é l.i.). Além disso,

$$\langle v_2', v_1' \rangle = \left\langle v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1', v_1' \right\rangle =$$

$$= \langle v_2, v_1' \rangle - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\cancel{\langle v_1', v_1' \rangle}} \cancel{\langle v_1', v_1' \rangle} = 0.$$

Daí $\{v_1', v_2'\}$ é base ortogonal de V. Normalizando:

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1'\|} v_1', \quad u_2 = \frac{1}{\|v_2'\|} v_2',$$

então $\{u_1, u_2\}$ é base ortonormal de V.

Exemplo. Seja $\beta = \{(2,1), (1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$. Vamos aplicar o processo sobre a base β, com respeito ao produto interno canônico de $\mathbb{R}^2$:

$v_1' = (2,1)$

$$v_2' = (1,1) - \frac{\langle (1,1),(2,1)\rangle}{\langle (2,1),(2,1)\rangle}(2,1) =$$

$$= (1,1) - \frac{3}{5}(2,1) = (-1/5, 2/5).$$

Note que $\langle (2,1), (-1/5, 2/5)\rangle = 2(-1/5) + 1\cdot(2/5) = 0$.
Daí

$$\{(2,1), (-1/5, 2/5)\}$$

é base ortogonal de $\mathbb{R}^2$. Normalizando:

$$\|(2,1)\| = \sqrt{\langle (2,1),(2,1)\rangle} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\|(-1/5, 2/5)\| = \sqrt{\langle (-1/5, 2/5), (-1/5, 2/5)\rangle} = \sqrt{1/25 + 4/25} = 1/\sqrt{5}.$$

Então

$$u_1 = \frac{1}{\|(2,1)\|}(2,1) = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), \quad u_2 = \frac{1}{\|(-1/5, 2/5)\|}(-1/5, 2/5) = (-\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5).$$

Daí $\{(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), (-\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5)\}$ é base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, com respeito ao produto interno usual.

O processo pode ser estendido para esp. vet. de dimensão n. A construção é conhecida como o Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Seja $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V, em que V é esp. vet. com produto interno.

$$v_1' = v_1$$
$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$
$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$
$$\vdots$$
$$v_n' = v_n - \frac{\langle v_n, v_{n-1}' \rangle}{\langle v_{n-1}', v_{n-1}' \rangle} v_{n-1}' - \dots - \frac{\langle v_n, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'.$$

Prova-se por indução que $\{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$ é ortogonal: assuma que para $i \geq 1$, o conj. $\{v_1', v_2', \dots, v_i'\}$. Então, p/ cada $j \in \{1, 2, \dots, i\}$,

$$\langle v_{i+1}', v_j' \rangle = \langle v_{i+1}, v_j' \rangle - \frac{\langle v_{i+1}, v_i' \rangle}{\langle v_i', v_i' \rangle} \overbrace{\langle v_i', v_j' \rangle}^{0} - \dots - \frac{\langle v_{i+1}, v_j' \rangle}{\cancel{\langle v_j', v_j' \rangle}} \cancel{\langle v_j', v_j' \rangle}$$
$$- \dots - \frac{\langle v_{i+1}, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} \overbrace{\langle v_1', v_j' \rangle}^{0} = 0.$$

Daí $\{v_1', \dots, v_i', v_{i+1}'\}$ é ortogonal. Segue que $\{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$ é base ortogonal de V.

Normalizando, obtemos uma base ortonormal:
$$\left\{ \frac{1}{\|v_1'\|} v_1', \frac{1}{\|v_2'\|} v_2', \dots, \frac{1}{\|v_n'\|} v_n' \right\}.$$

Exemplo. Seja $\beta = \{(1,1,1), (0,2,1), (0,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.
Vamos aplicar o processo de Gram-Schmidt sobre β, com respeito ao produto interno canônico de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1' = (1,1,1),$$

$$v_2' = (0,2,1) - \frac{\langle (0,2,1),(1,1,1)\rangle}{\langle (1,1,1),(1,1,1)\rangle}(1,1,1) = (0,2,1) - \frac{3}{3}(1,1,1)$$
$$= (-1,1,0).$$

$$v_3' = (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(1,1,1)\rangle}{\langle (1,1,1),(1,1,1)\rangle}(1,1,1) - \frac{\langle (0,0,1),(-1,1,0)\rangle}{\langle (-1,1,0),(-1,1,0)\rangle}(-1,1,0)$$

$$= (0,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) - 0(-1,1,0) = (-1/3, -1/3, 2/3).$$

Então $\{(1,1,1), (-1,1,0), (-1/3,-1/3,2/3)\}$ é base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Uma base ortonormal é $\{u_1, u_2, u_3\}$, em que:

$$u_1 = \frac{1}{\|(1,1,1)\|}(1,1,1) = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}),$$

$$u_2 = \frac{1}{\|(-1,1,0)\|}(-1,1,0) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0),$$

$$u_3 = \frac{1}{\|(-1/3,-1/3,2/3)\|}(-1/3,-1/3,2/3) = (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}).$$

Exemplo. Seja $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$, e defina o produto interno em $\mathbb{R}^2$ por:

$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + y_1y_2.$$

Vamos aplicar o processo de Gram-Schmidt sobre β com respeito ao produto interno $(\cdot,\cdot)$.

$$\langle (0,1),(1,0) \rangle = 2\cdot 0\cdot 1 - 0\cdot 0 - 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = -1$$
$$\langle (1,0),(1,0) \rangle = 2\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 0 - 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = 2$$
$$\langle (1/2,1),(1/2,1) \rangle = 2\cdot \tfrac{1}{2}\cdot \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cdot 1 - 1\cdot \tfrac{1}{2} + 1\cdot 1 = 1/2$$

$$v_1' = (1,0)$$

$$v_2' = (0,1) - \frac{\langle (0,1),(1,0) \rangle}{\langle (1,0),(1,0) \rangle}(1,0) = (0,1) - \left(\frac{-1}{2}\right)(1,0) = (1/2, 1).$$

Então $\{(1,0),(1/2,1)\}$ é base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Normalizando:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle (1,0),(1,0) \rangle}}(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0) = (1/\sqrt{2}, 0)$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{\langle (1/2,1),(1/2,1) \rangle}}(1/2,1) = \frac{1}{\sqrt{1/2}}(1/2,1) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}).$$

Daí $\{(1/\sqrt{2},0),(\sqrt{2}/2,\sqrt{2})\}$ é base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Como consequência do processo de Gram-Schmidt, prova-se:

Teorema. Seja V um esp. vet. de dimensão finita com produto interno. Então V admite uma base ortonormal.

Teorema. Seja V um esp. vet. de dim. fin. com prod. int. Seja $S \subseteq V$ um subconjunto. Então:

(i) $S^\perp$ é um subesp.

(ii) Se S é subesp. vet., então $V = S \oplus S^\perp$.

Dem.: (i) já vimos.

(ii) Seja $\{v_1, \dots, v_m\}$ base ortogonal de S, e complete $\{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_t\}$ base de V. Do processo de Gram-Schmidt, obtém-se base ortogonal $\{v_1, \dots, v_m, w_1', \dots, w_t'\}$. Daí $\{w_1', \dots, w_t'\}$ é base de $S^\perp$. Portanto, $V = S \oplus S^\perp$. $\square$

relembre: $S^\perp = \{v \in V \mid \langle v, s \rangle = 0, \forall s \in S\}$