Produto interno

Relembre que dados dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$ no plano, definimos o seu produto interno por
$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos\theta,$$
em que θ é o ângulo entre u e v. Usando trigonometria, prova-se que vale
$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2,$$
em que $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$.

As propriedades algébricas principais desse produto de vetores em $\mathbb{R}^2$ é o ponto de partida para a sua axiomatização para espaços vetoriais arbitrários.

Definição. Seja V um espaço vetorial real. Uma função
$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$
é um produto interno se valem:

(i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \ \forall u, v \in V$,

(ii) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \ \forall u, v, w \in V$,

(iii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \ \forall u, v \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

(iv) $\langle v, v \rangle \geq 0$, e
$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0.$$

Exemplo. Sejam $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n), v = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. O produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$ é definido por
$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$
Tal função satisfaz os axiomas (i)-(iv) da def. anterior, e portanto, é um produto interno.

Exemplo. Seja $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 2x_1x_2 + y_1y_2.$$

Então g é um produto interno em $\mathbb{R}^2$. De fato:

(i) $g((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 2x_1x_2 + y_1y_2 = 2x_2x_1 + y_2y_1 =$

$$= g((x_2,y_2),(x_1,y_1)).$$

(ii) $g((x_1,y_1)+(x_2,y_2),(x_3,y_3)) = g((x_1+x_2, y_1+y_2),(x_3,y_3))$

$$= 2(x_1+x_2)x_3 + (y_1+y_2)y_3 =$$

$$= \underbrace{2x_1x_3 + y_1y_3}_{g((x_1,y_1),(x_3,y_3))} + \underbrace{2x_2x_3 + y_2y_3}_{g((x_2,y_2),(x_3,y_3))}$$

(iii) exercício.

(iv) $\cdot\ g((x,y),(x,y)) = \underbrace{2x^2}_{\geq 0} + \overbrace{y^2}^{\geq 0} \geq 0.$

$\cdot\ g((0,0),(0,0)) = 2\cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$

$\cdot$ assuma que $0 = g((x,y),(x,y)) = 2x^2 + y^2$

$\Rightarrow 2x^2 = 0$ e $y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0.$

$\Rightarrow (x,y) = (0,0).$

Exemplo. Seja $V = C([0,1])$ o conj. da funções contínuas $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Então

$$\langle f,g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

é um produto interno.

Definição. Sejam V um esp. vet. com produto interno e $u, v \in V$. Dizemos que u e v são ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0$. Denota-se $u \perp v$.

Teorema. Valem as seguintes afirmações:
(i) $v \perp w \iff w \perp v$.
(ii) $0 \perp v, \forall v \in V$.
(iii) Se $v_1 \perp w$ e $v_2 \perp w$, então $(v_1 + v_2) \perp w$.
(iv) Se $v \perp w$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $(\lambda v) \perp w$.

Demonstração: exercício.

Definição. Sejam V um esp. vetorial e $S \subseteq V$ um subconjunto. Define-se o complemento ortogonal de S por

$$S^\perp = \{ v \in V \mid s \perp v, \forall s \in S \}.$$

Observação. De (ii)-(iv) do teorema anterior, segue que $S^\perp$ é um subespaço vetorial.

Definição. Um conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ é dito ser ortogonal se $v_i \perp v_j$, sempre que $i \neq j$.

Teorema. Se $\{v_1, \dots, v_m\}$ é ortogonal e $v_i \neq 0, \forall i$, então o conjunto é l.i.

Exemplo. Dada uma base ortogonal $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, ou seja, β é base e β é ortogonal, então temos uma forma de determinar as coordenadas de $v \in V$ na base β. Escreva $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$. Então

$$\langle v, v_i \rangle = \langle a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n, v_i \rangle =$$

$$a_1 \underbrace{\langle v_1, v_i \rangle}_{0} + \cdots + a_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{\neq 0} + \cdots + a_n \underbrace{\langle v_n, v_i \rangle}_{0}$$

Daí $\langle v, v_i \rangle = a_i \langle v_i, v_i \rangle \Rightarrow a_i = \dfrac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$.

Exemplo. Seja $\beta = \{(1,1), (1,-1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$. Como

$$\langle (1,1), (1,-1) \rangle = 1 \cdot 1 + 1(-1) = 0,$$

segue que β é base ortogonal.

Então, para qualquer $v \in \mathbb{R}^2$, vale

$$v = \frac{\langle v, (1,1) \rangle}{\langle (1,1), (1,1) \rangle} (1,1) + \frac{\langle v, (1,-1) \rangle}{\langle (1,-1), (1,-1) \rangle} (1,-1).$$

Por exemplo, se $v = (2,3)$, então

$$\frac{\langle (2,3), (1,1) \rangle}{\langle (1,1), (1,1) \rangle} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \frac{5}{2}, \quad \frac{\langle (2,3), (1,-1) \rangle}{\langle (1,-1), (1,-1) \rangle} = \frac{2 \cdot 1 + 3(-1)}{1 \cdot 1 + (-1)(-1)} = \frac{-1}{2}.$$

Daí

$$(2,3) = \frac{5}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1).$$

Definição. Seja V um esp. vet. com produto interno. Define-se a norma de $v \in V$ por

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Se $v \in V$ é tal que $\|v\| = 1$, então dizemos que v é unitário.

Exemplo. Se $v \neq 0$, então $u = \frac{1}{\|v\|} v$ é unitário, e é múltiplo de v.

Teorema. Seja V um esp. vet. com produto interno.

(i) $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \iff v = 0$.

(ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$,

(iii) $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ (desigualdade de Cauchy-Schwarz)

(iv) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (desigualdade triangular).

Definição. Uma base $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é dito ser ortonormal se β é ortogonal e os vetores são unitário. Ou seja, se vale

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Exemplo. Se $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal, então calcular $[v]_\beta$ fica mais simples:

$$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 + \cdots + \langle v, v_n \rangle v_n.$$

Teorema. Seja $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal e sejam

$$[u]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad [v]_\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Então

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Demonstração. Escreva $u = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$, e $v = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n$.

$$\langle u, v \rangle = \langle x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n, y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n \rangle$$
$$= x_1 \langle v_1, y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n \rangle + \cdots + x_n \langle v_n, y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \langle v_i, y_j v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle v_i, v_j \rangle =$$
$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

$\square$