2.1 Encontre todas as possibilidades para o polinômio minimal de um operador $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ com polinômio característico:

(a) $p_T(X) = (X-3)^3(X-2)^2$.

(b) $p_T(X) = (X-1)(X-2)(X-3)(X-4)(X-5)$.

(c) $p_T(X) = (X-2)^5$.

(a) O polinômio minimal é algo da forma

$$m_T(X) = (X-3)^{s_1}(X-2)^{s_2},$$

em que $s_1 \in \{1, 2, 3\}$ e $s_2 \in \{1, 2\}$.

Portanto, o polinômio minimal pode ser um dos seguintes:

$$(X-3)(X-2), \qquad (X-3)(X-2)^2$$

$$(X-3)^2(X-2), \qquad (X-3)^2(X-2)^2$$

$$(X-3)^3(X-2), \qquad (X-3)^3(X-2)^2$$

(b) O polinômio minimal é

$$m_T(X) = (X-1)(X-2)(X-3)(X-4)(X-5).$$

2.2. Determine o polinômio minimal de:

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

O polinômio característico é

$$p(X) = \det\begin{pmatrix} 1-X & 2 \\ 0 & -1-X \end{pmatrix} = (1-X)(-1-X) = (X-1)(X+1)$$

Como a matriz tem tamanho 2x2 e o pol. característico tem duas raízes distintas, segue que o pol. min. é $m(X) = (X-1)(X+1)$.

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Pol. característico:

$$p(X) = \det\begin{pmatrix} 2-X & 2 \\ 0 & 2-X \end{pmatrix} = (2-X)^2 = (X-2)^2.$$

O polinômio minimal vai ser $X-2$ ou $(X-2)^2$. Testando o primeiro:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segue que $X-2$ não é o pol. min. de $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, e portanto seu pol. min. é $(X-2)^2$.

(f) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pol. caract.:

$$p_A(X) = \det\begin{pmatrix} 3-X & 3 & 1 \\ 0 & 3-X & 2 \\ 0 & 0 & 1-X \end{pmatrix} = (3-X)^2(1-X) =$$

$$= -(X-3)^2(X-1).$$

Assim, o pol. min. é $(X-3)(X-1)$ ou $(X-3)^2(X-1)$. Testando o primeiro:

$$(A-3I)(A-I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Daí, $m_A(X) = (X-3)^2(X-1)$

(h) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

O pol. característico é:

$$p_A(X) = \det(A - X\cdot I) = \det\begin{pmatrix} 3-X & -1 \\ 9 & -3-X \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 4-X & -8 \\ 2 & -4-X \end{pmatrix}$$

$$= \big((3-X)(-3-X)+9\big)\big((4-X)(-4-X)+16\big)$$

$$= (X^2-9+9)(X^2-16+16) = X^4.$$

Daí, o pol. min. de A é X, X^2, X^3 ou X^4. Testando:

- $A \neq 0$
- $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$3+7+4-14$
$9+21-28-2$
$-21+1-8+28$
$-63+3+56+4$

Assim, o polinômio minimal é X^2.

(i)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

O pol. caract. é:

$$p_A(X) = \det(A - X\cdot I) = \det\begin{pmatrix} -X & -9 \\ 1 & 6-X \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 3-X & 0 \\ 0 & 3-X \end{pmatrix}$$
$$= (-X(6-X)+9)(3-X)^2 = (X^2-6X+9)(X-3)^2$$
$$= (X-3)^2(X-3)^2 = (X-3)^4.$$

O pol. min. é $(X-3)$, $(X-3)^2$, $(X-3)^3$ ou $(X-3)^4$. Testando:

- $A - 3I \neq 0$
- $(A-3I)^2 = \begin{pmatrix} -3 & -9 & & \\ 1 & 3 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -9 & & \\ 1 & 3 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

Daí, o pol. min. é $(X-3)^2$.

3.1 Determine a forma de Jordan de uma matriz real 5×5 cujo polinômio característico é $(X-2)^3(X-7)^2$ e cujo polinômio minimal é $(X-2)^2(X-7)^1$.

$$A \sim \begin{pmatrix} A_2 & \\ & A_7 \end{pmatrix},$$

A_7 é 2×2, e o seu maior bloco de Jordan tem tamanho 1. Então

$$A_7 = \begin{pmatrix} J_1(7) & \\ & J_1(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

A_2 é uma matriz 3×3, e admite um bloco de Jordan de tamanho 2. Portanto,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ 0 & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 0 & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 7 & \\ & & & & 7 \end{pmatrix}$$

3.2 Determine o número de matrizes não semelhantes A de tamanho 4×4 tais que seu polinômio minimal seja $(X+1)^2$.

Como A tem tamanho 4×4 e seu pol. min. é $(X+1)^2$, então seu pol. característico é

$$p_A(X) = (X+1)^4.$$

Daí

$$A \sim \begin{pmatrix} J_2(-1) & \\ & J_2(-1) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A \sim \begin{pmatrix} J_2(-1) & & \\ & J_1(-1) & \\ & & J_1(-1) \end{pmatrix}.$$

Daí

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, existem 2 matrizes não similares com o dado pol. min.

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad J_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$$J_1(-1) = (-1)$$

3.3. Determine a forma de Jordan:

(b) $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Vimos que o pol. caract. e o pol. min. coincidem com $(X-1)(X+1)$

Então
$$A \sim \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_{-1} \end{pmatrix},$$

em que A_1 e A_{-1} possuem tamanho 1×1. Daí
$$A_1 = J_1(1) = (1)$$
$$A_{-1} = J_1(-1) = (-1)$$
Daí
$$A \sim \begin{pmatrix} J_1(1) & \\ & J_1(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}.$$

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. pol. caract. = pol. min. = $(X-2)^2$.

Daí, sua forma de Jordan é
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \sim J_2(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(f) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $p_A(X) = -(X-3)^2(X-1)$
$m_A(X) = (X-3)^2(X-1)$.

Então
$$A \sim \begin{pmatrix} A_3 & \\ & A_1 \end{pmatrix},$$

em que A_3 é 2×2 e A_1 é 1×1. Além disso, $A_3 = J_2(3)$ e $A_1 = J_1(1)$. Segue que

$$A \sim \begin{pmatrix} J_2(3) & \\ & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \\ 0 & 3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

(h)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} p_A(X) &= X^4 \\ m_A(X) &= X^2. \end{aligned}$$

Daí

$$A \sim \begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_2(0) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A \sim \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_1(0) \end{pmatrix}$$

Então

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Lembre-se que a quantidade de blocos de Jordan associados ao autovalor 0 coincide com $\dim V_0$.

Temos

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - y + z - 7w = 0 \\ 9x - 3y - 7z - w = 0 \\ 4z - 8w = 0 \\ 2z - 4w = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x - y + z - 7w = 0 \\ -10z + 20w = 0 \\ 2z - 4w = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} 3x - y + z - 7w = 0 \\ 2z - 4w = 0 \end{cases}.$$

Então

$$V_0 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y + z - 7w = 2z - 4w = 0\}$$

$$= \{ (y + 5w, y, 2w, w) \mid y, w \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{ y(1,1,0,0) + w(5,0,2,1) \mid y, w \in \mathbb{R}\}$$

$$= [(1,1,0,0), (5,0,2,1)].$$

Note que $\{(1,1,0,0), (5,0,2,1)\}$ é l.i., e portanto,

$$\dim V_0 = 2.$$

Daí a forma de Jordan de A admite exatamente 2 blocos de Jordan. Portanto,

$$A \sim \begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & -9 & & \\ 1 & 6 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}$ | deve-se calcular $\dim V_3$.

(resp.: vale que $\dim V_3 = 3$, e então, $A \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ 0 & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}$)