Matrizes com entradas em $\mathbb{C}$.

Às vezes é interessante permitir o uso de complexos. Por exemplo, seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essa matriz é a matriz de um operador linear em $\mathbb{R}^2$ dada pela rotação. Portanto, A não admite autovetores reais. Seu polinômio característico é

$$p(X) = \det\begin{pmatrix} -X & 1 \\ -1 & -X \end{pmatrix} = X^2+1,$$

que não admite raízes reais. Portanto A não admite autovalores reais, e não é diagonalizável.

Porém, $p(X) = X^2+1 = (X+i)(X-i)$. Daí, A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ e

$$A \sim \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Vale mencionar que toda matriz admite forma de Jordan sobre $\mathbb{C}$.

Quantidade de blocos de Jordan.

Existe uma forma sistemática de determinar a forma de Jordan de uma matriz:

Teorema. Seja $T: V \to V$ um operador linear, $\dim V < \infty$, e seja λ um autovalor de T. Então a quantidade de blocos de Jordan $J_s(\lambda)$ que aparece na forma de Jordan de $[T]$ com $s \geq r$, (fixado $r \in \mathbb{N}$) é

$$\dim\left(\operatorname{Ker}(T-\lambda I)^r\right) - \dim \operatorname{Ker}\left((T-\lambda I)^{r-1}\right).$$

Ou seja, a quantidade de blocos de Jordan de tamanho r é:

$$2\dim\left(\operatorname{Ker}(T-\lambda I)^r\right) - \dim\operatorname{Ker}(T-\lambda I)^{r+1} - \dim\operatorname{Ker}(T-\lambda I)^{r-1}.$$

Campos de vetores. Um campo de vetores no plano é uma função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Uma solução é uma curva $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(\gamma(t)) = \gamma'(t), \quad \forall t \in I.$$

Ou seja, γ "está na direção" do campo de vetores.

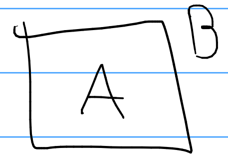
Uma solução em $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ é uma curva solução $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ que passa por (x_0,y_0).

Os dois problemas principais são:

1) encontre uma curva solução passando por um dado ponto,
2) encontre propriedades de uma curva solução, sem conhecer a curva.

Campos de vetores aparecem em modelagens de problemas.

Exemplo. Tem-se uma câmara B, em temperatura fixa T_0, e coloca-se um corpo A em B. Queremos estudar a variação da temperatura de A no tempo.



Pode-se propor o seguinte: "a variação da temperatura de A é proporcional à diferença de temperatura de B e A".

Agora, considere o caso especial em que $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um operador linear. Seja A a matriz do operador linear.

Neste caso, a curva solução que passa por (x_0, y_0) é

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\gamma(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

em que

$$e^{tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (tA)^n .$$

Exemplo. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = (-2x+y, -y).$$

Então a matriz de f é

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Daí

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)^n & -(-2)^n + (-1)^n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Daí

$$e^{tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} t^n A^n = \begin{pmatrix} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-2t)^n & \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} (-(-2)^n + (-1)^n) \\ 0 & \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-t)^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Exemplo. Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$f(x,y) = (4x - y, x + 2y).$$
A matriz de f é
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Seu polinômio característico é $p(X) = (X-3)^2$. Então A não é diagonalizável, e sua forma de Jordan é
$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Ainda,
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Daí
$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^{t\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+1)e^{3t} & -te^{3t} \\ te^{3t} & (1-t)e^{3t} \end{pmatrix}.$$