Forma de Jordan

Vimos que nem toda matriz é diagonalizável. Nestes casos, temos outras formas úteis que simplificam a matriz. Vamos estudar a forma de Jordan.

Definição. Sejam $s \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Um bloco de Jordan de tamanho s em λ é a matriz $s \times s$:

$$J_s(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Teorema. Seja A uma matriz quadrada com polinômio característico

$$p(X) = (X-\lambda_1)^{a_1}(X-\lambda_2)^{a_2}\cdots(X-\lambda_q)^{a_q},$$

e polinômio minimal

$$m(X) = (X-\lambda_1)^{s_1}(X-\lambda_2)^{s_2}\cdots(X-\lambda_q)^{s_q}.$$

Então

$$A \sim \begin{pmatrix} A_{\lambda_1} & & 0 \\ & A_{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & A_{\lambda_q} \end{pmatrix},$$

em que A_{λ_i} é uma matriz $a_i \times a_i$, formada por blocos de Jordan em λ_i:

$$A_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} J_{n_{1i}}(\lambda_i) & & 0 \\ & J_{n_{2i}}(\lambda_i) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_{n_{ti}}(\lambda_i) \end{pmatrix}, \text{ com } n_{1i} \geq n_{2i} \geq \cdots \geq n_{ti},$$

e $n_{1i} = s_i$, e $t = \dim V_{\lambda_i}$.

Exemplos.

1. Seja A uma matriz com $p_A(X) = -(X-5)^3$, $m_A(X) = (X-5)^2$.
Então

$$A \sim \begin{pmatrix} J_{n_1}(5) & & & 0 \\ & J_{n_2}(5) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_t}(5) \end{pmatrix},$$

com $2 = n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_t$. Além disso, como A é 3×3, segue que $\underbrace{n_1}_{2} + n_2 + \cdots + n_t = 3$. Isso só pode ocorrer se $t = 2$ e $n_2 = 1$. Portanto,

$$A \sim \begin{pmatrix} J_2(5) & 0 \\ 0 & J_1(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$J_2(5) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad J_1(5) = (5)$$

2. Seja A uma matriz 5×5 com

$$p_A(X) = -(X-2)^3(X-3)^2, \quad m_A(X) = (X-2)^3(X-3)^1.$$

Então

$$A \sim \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

em que

$$A_2 = \begin{pmatrix} J_{n_{12}}(2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_{r2}}(2) \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} J_{n_{13}}(3) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_{t3}}(3) \end{pmatrix}$$

com

$$3 = n_{12} \geq n_{22} \geq \cdots \geq n_{r_2}, \text{ e } 1 = n_{13} \geq n_{23} \geq \cdots \geq n_{t3}.$$

Note que $n_{13} = n_{23} = \cdots = n_{t3} = 1$. Como A_3 tem tamanho 2×2, segue que $t=2$, e portanto,

$$A_3 = \begin{pmatrix} J_1(3) & \\ & J_1(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para o bloco A_2, temos que

$$3 = n_{12} \geq n_{22} \geq \cdots \geq n_{r2}$$

e

$$n_{12} + n_{22} + \cdots + n_{r2} = 3.$$

Portanto, $r=1$. Daí

$$A_2 = \begin{pmatrix} J_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a forma de Jordan de A é

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Seja A de tamanho 4×4 com pol. característico $(X+1)^4$ e polinômio minimal $(X+1)^2$. Então

$$A \sim \begin{pmatrix} J_{n_1}(-1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_t}(-1) \end{pmatrix}, \quad \text{com}$$

$$2 = n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_t, \text{ e } n_1 + n_2 + \cdots + n_t = 4.$$

Temos duas soluções possíveis:

- $t=2$ e $n_2 = 2$ é uma possibilidade,
- $t=3$, $n_2 = 1$ e $n_3 = 1$ também é uma possibilidade.

$$2 + n_2 + \cdots + n_t = 4$$

$$2$$

$$2 + 1 + 1$$

Portanto, não tem como determinar a forma de Jordan de A somente com essas duas informações.

Ambas as configurações seriam possíveis:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Seja A uma matriz com $p_A(X) = (X-7)^6$, $m_A(X) = (X-7)^3$, e assuma que $\dim V_7 = 3$.

Então

$$A \sim \begin{pmatrix} J_{n_1}(7) & & \\ & J_{n_2}(7) & \\ & & J_{n_3}(7) \end{pmatrix},$$

em que

$$3 = n_1 \geq n_2 \geq n_3, \qquad n_1 + n_2 + n_3 = 6.$$

$$3 + 3 + 1 \neq 6$$
$$3 + 2 + 1 = 6$$
$$3 + 1 + 1 \neq 6$$

Portanto, a única possibilidade é $n_1 = 3$, $n_2 = 2$ e $n_1 = 1$.

Então, a forma de Jordan de A é

$$A \sim \begin{pmatrix} J_3(7) & & \\ & J_2(7) & \\ & & J_1(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 7 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 7 & & & \\ & & & 7 & 1 & \\ & & & 0 & 7 & \\ & & & & & 7 \end{pmatrix}.$$

5. Encontre a forma de Jordan de

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

O pol. caract. é

$$p_A(X) = \det \begin{pmatrix} 8-X & -1 & & \\ 4 & 12-X & & 0 \\ & & 9-X & 2 \\ 0 & & 2 & 6-X \end{pmatrix} =$$

$$= \big((8-X)(12-X)+4\big)\big((9-X)(6-X)-4\big)$$

$$= (X^2-20X+100)(X^2-15X+50)$$

$$= (X-10)^2(X-5)(X-10) = (X-10)^3(X-5).$$

O polinômio minimal é $m_A(X) = (X-10)^{\ell}(X-5)$, em que $\ell = 1$, $\ell = 2$ ou $\ell = 3$. Testando:

- $\ell = 1$:

$$(A-10)(A-5) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & & \\ 4 & 2 & & \\ & & -1 & 2 \\ & & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & & \\ 4 & 7 & & \\ & & 4 & 2 \\ & & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -5 & & \\ 20 & 10 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\ell = 2$:

$$(A-10)^2(A-5) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & & \\ 4 & 2 & & \\ & & -1 & 2 \\ & & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 & -5 & & \\ 20 & 10 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí $m_A(X) = (X-10)^2(X-5)$.

Sabe-se que
$$A \sim \begin{pmatrix} A_{10} & 0 \\ 0 & A_5 \end{pmatrix},$$
em que A_{10} é 3×3 e A_5 é 1×1. Então
$$A_5 = (5),$$
e
$$A_{10} = \begin{pmatrix} J_{n_1}(10) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_t}(10) \end{pmatrix},$$
com
$$2 = n_1 \geq \cdots \geq n_t, \quad e \quad n_1 + n_2 + \cdots + n_t = 3$$
Segue que $t = 2$ e $n_2 = 1$. Assim,
$$A \sim \begin{pmatrix} J_2(10) & & \\ & J_1(10) & \\ & & J_1(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & & \\ 0 & 10 & & \\ & & 10 & \\ & & & 5 \end{pmatrix}$$

$n_1 + n_2 + \cdots = 3$

$2 + 2 \neq 3$

1