Relembre:

1) **Def.** Um operador $T: V \to V$ é dito ser **diagonalizável** se existe uma base de V, formada por autovetores de T.

Teorema. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_m$ autovetores de T associados a autovalores **distintos**. Então

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$$

é um conjunto l.i.

Teorema. Seja $T: V \to V$ um operador linear e $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ todos os autovalores de T. Então T é diagonalizável se e só se

$$\dim V = \dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_m}.$$

1.1 Para cada uma das transformações lineares a seguir, determine se a mesma é diagonalizável. Em caso positivo, encontre uma base do espaço formado por autovetores da transformação.

(d) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x+y,\ 2x+y)$.

A matriz de T em relação à base canônica é

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

O pol. característico:

$$p_T(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 2 = \lambda^2 - 2\lambda - 1.$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \iff \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Os autovalores de T são $1+\sqrt{2}$ e $1-\sqrt{2}$.

· Autovetores associados a $1+\sqrt{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})x \\ (1+\sqrt{2})y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x} + y = \cancel{x} + \sqrt{2}x \\ 2x + y = y + \sqrt{2}y \end{cases} \sim$$

$$\sim \{ y = \sqrt{2}x$$

Daí $V_{1+\sqrt{2}} = \{(x, \sqrt{2}x) \mid x \in \mathbb{R}\} \ni (1, \sqrt{2})$.

· Autovetores associados a $1-\sqrt{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})x \\ (1-\sqrt{2})y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = x - \sqrt{2}x \\ 2x + y = y - \sqrt{2}y \end{cases}$$

$$\sim \{ y = -\sqrt{2}x$$

Daí $V_{1-\sqrt{2}} = \{(x, -\sqrt{2}x) \mid x \in \mathbb{R}\} \ni (1, -\sqrt{2})$.

Então, em particular, $(1, \sqrt{2})$ é autovetor de T, associado a $1+\sqrt{2}$, e $(1, -\sqrt{2})$ é autovetor associado a $1-\sqrt{2}$. Assim,

$$\beta = \{(1, \sqrt{2}), (1, -\sqrt{2})\}$$

é um conjunto l.i. Portanto, como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, segue que β é base de $\mathbb{R}^2$, formada por autovetores de T.

Note que

$$\dim V_{1+\sqrt{2}} + \dim V_{1-\sqrt{2}} = 1 + 1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2.$$

1.2 Determine se as seguintes matrizes A são diagonalizáveis. Em caso positivo, encontre M tal que $M^{-1}AM$ é uma matriz diagonal.

(C base canônica de $\mathbb{R}^n$)

Ideia: Seja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $[T]_C^C = A$. Seja β uma base de $\mathbb{R}^n$ tal que $[T]_\beta^\beta$ é diagonal. Então

$$[I]_\beta^C [T]_C^C [I]_C^\beta = [T]_\beta^\beta$$

Então, tomando $M = [I]_C^\beta$, então $[I]_\beta^C = M^{-1}$, e

$$M^{-1} A M$$

é diagonal.

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- O polinômio característico é

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1 = \lambda(\lambda - 2).$$

- os autovalores são 0 e 2,
- Os autoespaços são

$$V_0 = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad e$$

$$V_2 = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \qquad \text{(verifique todas as contas)}.$$

Daí $\{(1,-1), (1,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, formada por autovetores de A.
(pois: $(1,-1)$ é associado a 0, $(1,1)$ é associado a 2. Daí $\{(1,-1), (1,1)\}$ é l.i. Como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, o conj. é base).
Então

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

vale que

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Portanto, A é diagonalizável.

Checando (somente uma vez):
de fato,

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.3 Utilize a forma diagonal pra encontrar A^n, em que $n \in \mathbb{N}$, nos seguintes casos:

(a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Ideia: Encontrar M tal que $M^{-1}AM = D$ é diagonal.
Daí
$$A^n = MD^nM^{-1}.$$

Pol. característico de A:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(2-\lambda) + 4 = \lambda^2 + \lambda - 2 =$$
$$= (\lambda+2)(\lambda-1)$$

Os autovalores são -2 e 1. Vale também:

$$V_{-2} = \{(4y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$
$$V_1 = \{(y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$
(verifique)

Então, $\{(4,1), (1,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovet. de A. Seja
$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando M^{-1}:
$$M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Então,
$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$M^{-1}A^nM = (M^{-1}AM)^n = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$A^n = M\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}M^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & -(-2)^n \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4(-2)^n - 1 & -4(-2)^n + 4 \\ (-2)^n - 1 & -(-2)^n + 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-2)^{n+2} - 1 & -(-2)^{n+2} + 4 \\ (-2)^n - 1 & -(-2)^n + 4 \end{pmatrix}.$$

1.4 Determine se as seguintes matrizes A são diagonalizáveis. Em caso positivo, encontre uma matriz diagonal similar a A.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

O pol. característico é:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$$

$$0 = \lambda^2 - 5\lambda - 2 \iff \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Os autovalores de A são $\frac{5+\sqrt{33}}{2}$ e $\frac{5-\sqrt{33}}{2}$.

Como

$$2 = \dim \mathbb{R}^2 \geq \dim V_{\frac{5+\sqrt{33}}{2}} + \dim V_{\frac{5-\sqrt{33}}{2}} \geq 2,$$

Segue que

$$\dim V_{\frac{5+\sqrt{33}}{2}} + \dim V_{\frac{5-\sqrt{33}}{2}} = 2 = \dim \mathbb{R}^2.$$

Daí A é diagonalizável e

$$A \sim \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}$$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

pol. caract. é

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2.$$

Então 2 é o único autovalor. Os autovetores são:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 2x \\ 2y = 2y \end{cases} \sim \{ y = 0.$$

Portanto, $V_2 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, e daí $\dim V_2 = 1$.

Segue que A não é diagonalizável.