

Diagonalização

Dado um operador linear $T: V \rightarrow V$, queremos encontrar uma base β de V de modo que $[T]_{\beta}^{\beta}$ seja "o mais simples possível".

Definição. Sejam V um esp. vetorial e $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Dizemos que T é **diagonalizável** se existe uma base β de V formada por autovetores de T .

Exemplo. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x - 3y, -y)$.
A matriz de T (em relação à base canônica) é:

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(1, 0) &= (2, 0) = 2 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1) \\ T(0, 1) &= (-3, -1) = -3 \cdot (1, 0) + (-1) \cdot (0, 1) \end{aligned}$$

Seu pol. caract. é

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda).$$

Os autovalores são 2 e -1. Os autovetores:

- (associados a 2):

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 2x \\ -y = 2y \end{cases} \sim \begin{cases} y = 0 \end{cases}$$

Dai, os autovetores são $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$.

- (associados a -1):

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -x \\ -y = -y \end{cases} \sim \begin{cases} x = y \end{cases}$$

Dai, os autovetores associados a -1 são (x, x) , $x \in \mathbb{R}$.

Em particular, $(1,0)$ é autovetor de T associado a 2 , e $(1,1)$ é autovetor associado a -1 . O conjunto

$$\beta = \{(1,0), (1,1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^2$, e é constituído por autovetores de T . Portanto, T é diagonalizável. Agora, o que é $[T]_{\beta}$?

Note que

$$T(1,0) = 2 \cdot (1,0) \Rightarrow [T(1,0)]_{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(1,1) = -1 \cdot (1,1) \quad [T(1,1)]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Segue que

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(-1, -1) = 0 \cdot (1,0) + (-1) \cdot (1,1)$$

Observação. Seja $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V tal que $[T]_{\beta}$ é diagonal, ou seja,

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Então $v_1, v_2, \dots, v_n$ são autovetores de T . De fato:

$$[T(v_1)]_{\beta} = [T]_{\beta} [v_1]_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T(v_1) = \lambda_1 v_1.$$

Da mesma forma, $T(v_i) = \lambda_i v_i$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Exemplo. Determine se as transformações lineares a seguir são diagonalizáveis, e em caso positivo, encontre uma base formada por autovetores.

$$(a) T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (2x + 2y, 2x - y)$$

$$(b) T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (x + y, y).$$

(a) A matriz do operador linear é

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Seu pol. característico é

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (2,2) \\ T(0,1) &= (2,-1) \end{aligned}$$

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 4 =$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 2 - 4 = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2).$$

Os autovalores são 3 e -2. Os autovetores são:

$$- (\lambda = 3): \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 3x \\ 2x - y = 3y \end{cases} \sim \begin{cases} x = 2y \\ y = -2x \end{cases}$$

$$\therefore (2y, y), y \in \mathbb{R}.$$

$$- (\lambda = -2): \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = -2x \\ 2x - y = -2y \end{cases} \sim \begin{cases} y = -2x \\ y = -2x \end{cases}$$

$$\therefore (x, -2x), x \in \mathbb{R}.$$

Em particular, $(2,1)$ e $(1,-2)$ são autovetores de T , tal que $\{(2,1), (1,-2)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$. Daí T é diagonalizável.

$$(b) T(x,y) = (x+y, y).$$

Sua matriz é

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seu pol. caract. é

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2,$$

e 1 é seu único autovalor. Os autovetores associados a 1 são:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y = x \\ y = y \end{cases} \sim \begin{cases} y = 0 \\ y = y \end{cases}$$

Segue que $V_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, e

$\dim V_1 = 1 < 2 = \dim \mathbb{R}^2$.
Portanto, T não é diagonalizável.

Definição. Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem. Dizemos que A é **similar** a B se existe M invertível tal que
 $M^{-1}AM = B$.

Denota-se $A \sim B$.

Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear diagonalizável, e β uma base tal que $[T]_\beta^\beta$ é diagonal. Seja γ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Então, lembre que vale

$$[I]_\beta^\gamma [T]_\gamma^\gamma [I]_\gamma^\beta = [T]_\beta^\beta.$$

Ainda, $[I]_\beta^\gamma = ([I]_\gamma^\beta)^{-1}$. Portanto, $[T]_\gamma^\gamma \sim [T]_\beta^\beta$. Ou seja, $[T]_\gamma^\gamma$ é similar a uma matriz diagonal.

Definição. Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Dizemos que A é **diagonalizável** se A é similar a uma matriz diagonal.

Observação. Note que
 $(M^{-1}AM)^2 = \overbrace{M^{-1}AM M^{-1}AM}^I = M^{-1}A^2M$.

$$(M^{-1}AM)^3 = (M^{-1}AM)^2 (M^{-1}AM) = M^{-1}A^2 \overbrace{MM^{-1}}^I AM = M^{-1}A^3M.$$

Em geral,
 $(M^{-1}AM)^m = M^{-1}A^m M.$

Exemplo. Seja $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$. Calcule:

(a) A^{50} (b) A^m , $m \in \mathbb{N}$.

Seu pol. caract. é

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 6 & -5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(-5-\lambda) + 24 = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1).$$

O vetor $(1,1)$ é autovetor associado a 1, e $(2,3)$ é autovetor associado a -1 (verifique). $\beta = \{(1,1), (2,3)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

Seja

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Então

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

e

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dado $m \in \mathbb{N}$, vale que

$$M^{-1}A^m M = (M^{-1}AM)^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1^m & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix}.$$

$$A^m = \underbrace{M}_{I} \underbrace{M^{-1}}_{I} A^m \underbrace{M}_{I} \underbrace{M^{-1}}_{I} = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix} M^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2(-1)^{m+1} & -2 + 2(-1)^m \\ 3 + 3(-1)^{m+1} & -2 + 3(-1)^m \end{pmatrix}.$$

Em particular,

$$A^{50} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema. Sejam $v_1, v_2, \dots, v_m$ autovetores de um op. linear associados a autovalores distintos. Então $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ é l.i.

Teorema. Seja $T: V \rightarrow V$ um op. linear e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ seus autovalores distintos. Então T é diagonalizável se e só se $\dim V = \dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_m}$.

Consequência. Seja $T: V \rightarrow V$ um op. linear, com $\dim V = n$. Assuma que T admite n autovalores distintos. Então T é diagonalizável. Se β é base tal que $[T]_{\beta}^{\beta}$ é diagonal, então $[T]_{\beta}^{\beta}$ é constituído por seus autovalores.

Exemplo. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\sqrt{7} \\ 0 & 3 & -\sqrt{11} \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Determine se A é diagonalizável, e apresente a sua forma diagonal.

O pol. caract. é

$$p_A = \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(3 - \lambda)(-5 - \lambda).$$

Então, A admite 3 autovalores distintos, e portanto, A é diagonalizável. Ainda,

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$