Autovalor e Autovetor

Um operador linear é uma transformação linear $T: V \to V$ (ou seja, domínio e contradomínio coincidem).

Dado operador linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, então $[T]$ denota a matriz de T em relação a base canônica

$$\beta = \{(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1)\}.$$

Ou seja, $[T] = [T]^\beta_\beta$.

Definição. Seja $T: V \to V$ linear. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, $v \neq 0$, tais que $T(v) = \lambda v$. Então λ é denominado um autovalor e v é um autovetor de T associado a λ.

Exemplos.

1. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (x,-y)$. Então

$$T(1,0) = (1,0) = 1 \cdot (1,0)$$
$$T(0,1) = (0,-1) = -1 \cdot (0,1)$$

Então 1 e -1 são autovalores de T, $(1,0)$ é autovetor associado a 1, e $(0,1)$ é autovetor associado a -1.

2. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Então

$$T(1,0,0) = (1,0,0) = 1 \cdot (1,0,0)$$
$$T(0,1,0) = (0,-2,0) = -2 \cdot (0,1,0)$$
$$T(0,0,1) = (0,0,3) = 3 \cdot (0,0,1).$$

Então 1, -2 e 3 são autovalores de T.

Definição. Seja λ um autovalor de T. Então, definimos o autoespaço associado a λ como sendo
$$V_\lambda = \{ v \in V \mid T(v) = \lambda v \}.$$

Dados $v_1, v_2 \in V_\lambda$, então
$$T(v_1+v_2) = T(v_1) + T(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1+v_2)$$
$$\Rightarrow v_1+v_2 \in V_\lambda.$$
Se $\mu \in \mathbb{R}$ e $v \in V$,
$$T(\mu v) = \mu T(v) = \mu \lambda v = \lambda(\mu v) \Rightarrow \mu v \in V_\lambda.$$
$T(0) = 0 = \lambda \cdot 0 \Rightarrow 0 \in V_\lambda.$

Portanto, V_λ é um subespaço vetorial de V.

Exemplo. 3. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada pela rotação por um ângulo de $\pi/2$, ou seja,
$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Então T não admite autovalor real, pois se $v \neq 0$, então $T(v)$ não é um múltiplo de v.

Definição. Seja M uma matriz quadrada de ordem n. Diz-se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de M se existe uma matriz coluna $n \times 1$ **não-nula** B de modo que
$$MB = \lambda B.$$
Equivalentemente, seja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $[T] = M$, e seja $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $[v] = B$. Então λ é autovalor de T se e só se λ é autovalor de M. Além disso, v é autovetor de T associado a λ se e só se B é autovetor de M associado a λ.

Relembre: $MX=0$ possui sol. não-trivial $\Leftrightarrow$ $\det M = 0$.

Seja M uma matriz quadrada de ordem n. Queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ e B não nulo tais que

$$MB = \lambda B \iff (M - \lambda I)B = 0.$$

Isso significa que o sistema linear

$$(M - \lambda I)X = 0$$

possui solução não trivial. Portanto, $\det(M - \lambda I) = 0$. A recíproca é válida: se $\det(M - \lambda I) = 0$, então λ é autovalor de M.

Definição. O polinômio $p_M(\lambda) = \det(M - \lambda I)$ é denominado o polinômio característico de M.

Exemplo. 4. Seja

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Então

$$p_M(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda).$$

As raízes de p_M são 1, -2 e 3, que coincidem com os autovalores da matriz M.

Agora, seja $T: V \to V$ um op. linear, e seja β uma base de V. Define-se o polinômio característico de T por

$$p_T(\lambda) = \det([T]_\beta^\beta - \lambda I)$$

Teorema. $p_T(\lambda)$ independe da base β.

Exemplos. 5. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então seu polinômio característico é:

$$p_T(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2+1.$$

Então p_T não possui raiz real, o que justifica algebricamente porque a rotação não possui autovalor real.

6. Determine os autovalores e autovetores de $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por $T(x,y) = (x+2y, -2y)$.

$[T(1,0)]_\beta = [(1,0)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$[T(0,1)]_\beta = [(2,-2)]_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\beta = \{(1,0),(0,1)\}$

Temos que

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

O polinômio característico é

$$p_T(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda).$$

Suas raízes são 1 e -2. Daí, os autovalores de T são 1 e -2.

Para determinar os autovetores associados a 1, resolvemos o seguinte:

$$\underbrace{T(x,y)}_{(x+2y,-2y)} = \underbrace{1\cdot(x,y)}_{(x,y)}$$

Daí, obtemos o sistema

$$\begin{cases} x+2y = x \\ -2y = y \end{cases} \sim \{ y = 0$$

Portanto, os autovetores associados a 1 são da forma $(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$.

Os autovetores associados a -2 são as soluções de:

$$\underbrace{T(x,y)}_{(x+2y,-2y)} = \underbrace{-2.(x,y)}_{(-2x,-2y)}$$

Daí,

$$\begin{cases} x+2y = -2x \\ -2y = -2y \end{cases} \sim x = -\frac{2}{3}y$$

Então os autovetores associados a -2 são da forma $(-\frac{2}{3}y, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Observações.

(a) Se $\dim V = n$, então $T: V \to V$ possui no máximo n autovalores.

(b) Seja λ um autovalor de T. A multiplicidade algébrica de λ é a multiplicidade da raiz λ do polinômio característico. A multiplicidade geométrica de λ é $\dim V_\lambda$.

(c) Teorema: mult. geo. $\lambda \leq$ mult. alg. λ.

Exemplos.

7. Vamos determinar os autovalores e autovetores da matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Seu pol. característico é

$$p_M(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Daí, os autovalores de M são 1 (possui mult. alg. 2), e 2 (possui mult. alg. 1).

Autovetores associados a 1:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 4z \\ y + z \\ 2z \end{pmatrix}$$

Então obtemos

$$\begin{cases} x + 4z = x \\ y + z = y \\ 2z = z \end{cases} \sim \{ z = 0$$

Portanto, os autovetores associados a 1 são da forma $(x, y, 0)$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Isso implica que

$$V_1 = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \{(x,0,0) + (0,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{x(1,0,0) + y(0,1,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = [(1,0,0), (0,1,0)].$$

Daí $\dim V_1 = 2$. Assim, a mult. geo. de $\lambda = 1$ é 2.

Autovetores associados ao 2:

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 4z \\ y + z \\ 2z \end{pmatrix}$$

Daí

$$\begin{cases} x \qquad +4z = 2x \\ \quad y + z = 2y \\ \qquad\quad 2z = 2z \end{cases} \sim \begin{cases} x = 4z \\ y = z \end{cases}$$

Então, os autovetores associados a 2 são da forma $(4z, z, z)$, com $z \in \mathbb{R}$. Então

$$V_2 = \{(4z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(4,1,1) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(4,1,1)].$$

Daí $\dim V_2 = 1$.

Exemplo 8. Vamos determinar os autovalores e autovetores de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$P_M(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

$$V_1 = [(1,0,0)],$$

$$V_2 = [(4,0,1)]$$